Основи Геометрії

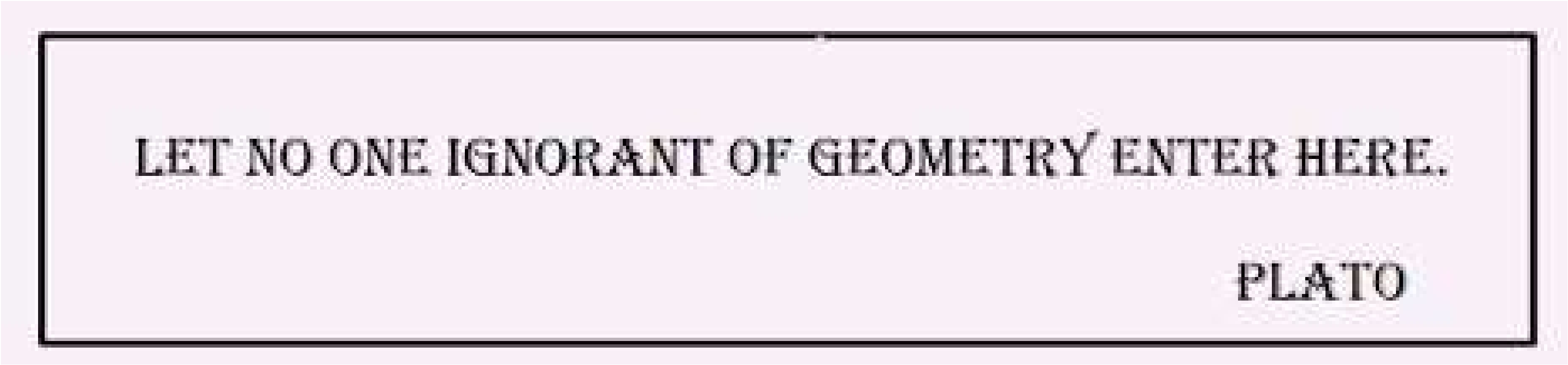
чим є евклідова геометрія і яке її місце
в сучасній теоретико-множинній парадигмі
математичних структур Бурбакі?

Академія Платона (387 – 86 до н.е.)

Фреска з Помпеї ≤ 79 р. н. е.

Фреска Рафаеля у Ватиканському палаці, 1509.

Кажуть, що напис над входом до Платонівської академії гласив:



А всередині Академії цілком могло би бути знамените:

Учітеся, брати мої!
Думайте, читайте,
І чужому научайтесь,
Свого не цурайтесь…

Ну і біля «чорного» виходу з Академії
(для тих, хто не надто старався):

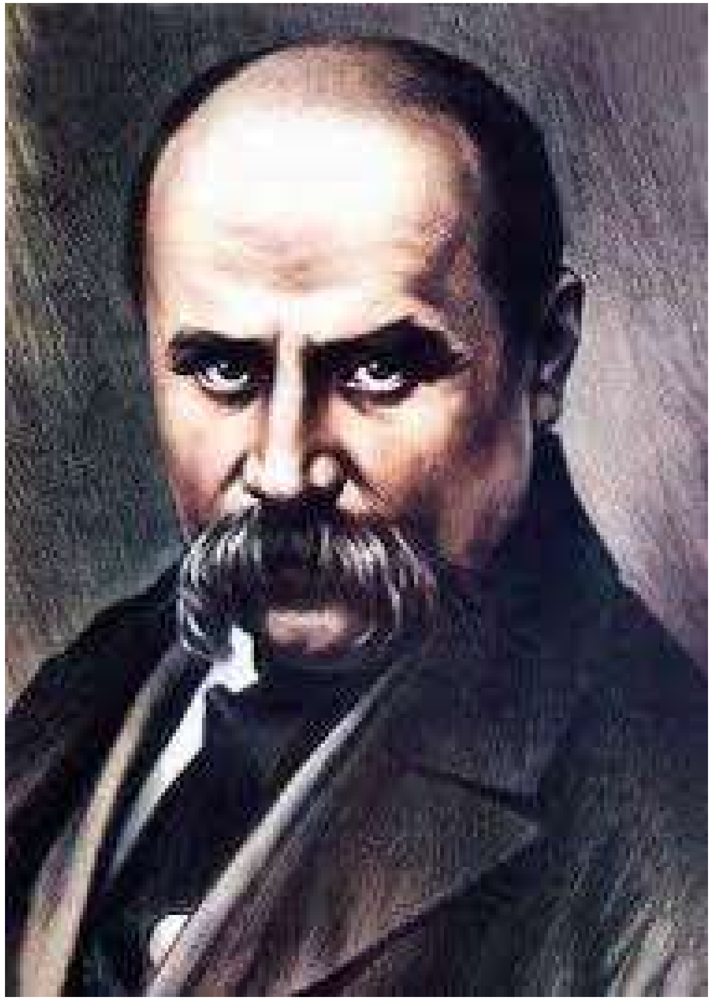
Якби ви вчились так, як треба,
То й мудрість би була своя…

Тарас Шевченко,
«І мертвим, і живим …», 1845 рік

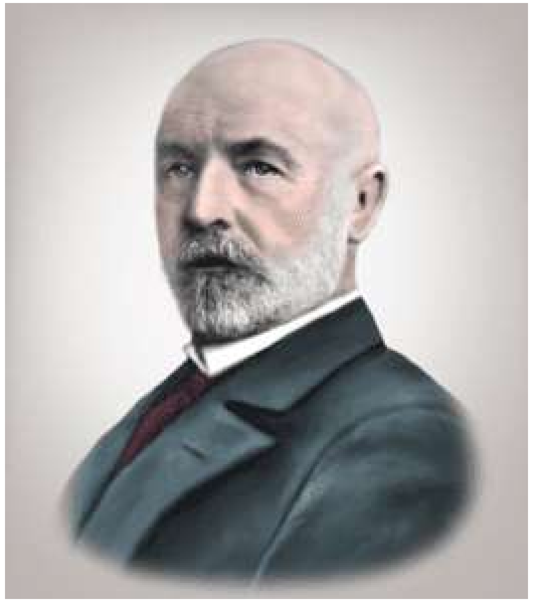
Тарас Шевченко (автопортрет 1843 року)

Борітеся — поборете!
Вам Бог помагає!
За вас правда, за вас слава
І воля святая!

З поеми «Кавказ», 1945



Тарас Григорович Шевченко
(09.03.1814 – 10.03.1861)



Про волю і свободу (в контексті математики) висловлювався також творець теорії множин Георг Кантор:

Georg Cantor
(1845 – 1918)

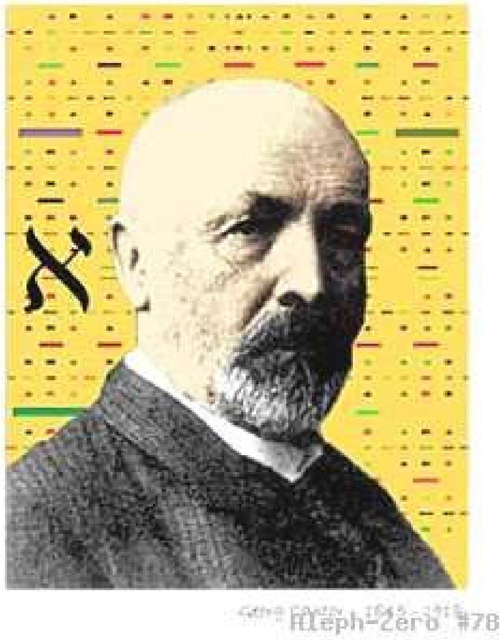
“das Wesen der Mathematik liegt gerade in ihrer Freiheit“

(«суть математики полягає саме в її свободі»)

Georg Cantor

На виході з сучасної математичної академії (якби така існувала) мала би красуватися знаменита цитата Гільберта:

Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen,
soll uns niemand vertreiben können.



Georg Cantor
(1845 – 1918)

Bertrand Russell
(1872 – 1970)

David Hilbert
(1862 – 1943)

Геометрія є однією з найдавніших галузей людських знань.

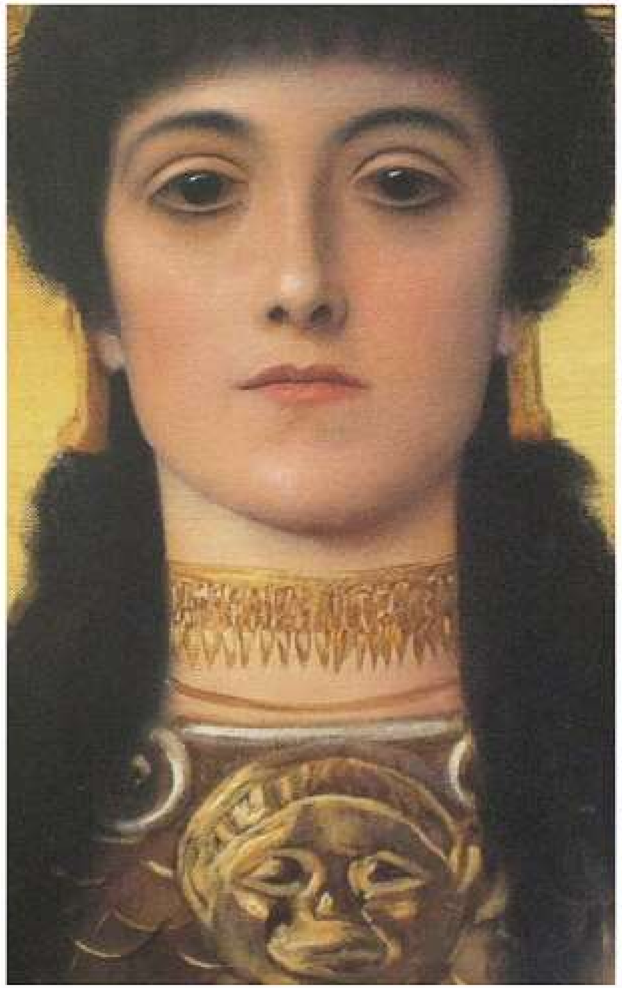
Вона описує певні (а саме, геометричні) властивості фізичного простору, в якому ми живемо.

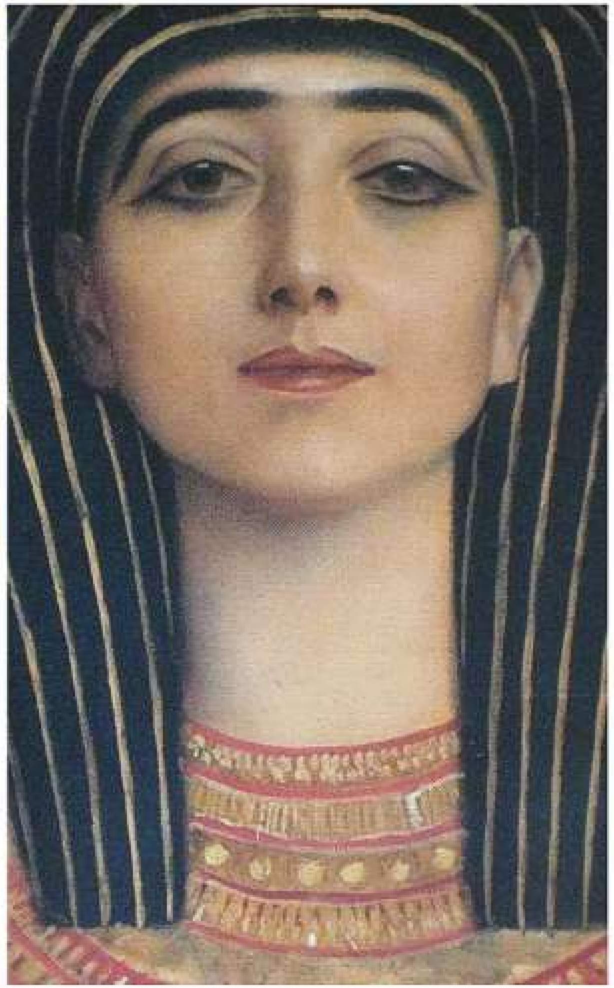
Дослівно «геометрія» означає «землеміряння».

Потреба в землемірянні виникла разом із розвитком будівництва та сільського господарства, тобто на самих початках людської цивілізації.

Значного розвитку землеміряння досягло у древніх цивілізаціях Вавилону, Індії, Китаю і особливо Єгипту.

Саме єгиптян вважають
своїми попередниками
древньогрецькі геометри,
в часи яких землеміряння
вийшло на якісно новий рівень
і стало аксіоматично-
дедуктивною наукою
геометрією,
якою залишається й дотепер.





Антична Греція та античний Єгипет

Gustav Klimt, 1891

Як добре видно в наші складні часи, політичний устрій має значний вплив на шляхи цивілізаційного розвитку тих чи інших народів.

Демократія, попри усі свої недоліки, має ту незаперечну перевагу, що вона вивільняє суспільну енергію і спрямовує її на цивілізаційний розвиток, який недосяжний тиранічнішим формам суспільного устрою.

Демократія досить природно виникає в суспільствах зі значним прошарком «середнього» класу, тобто заможних людей із приблизно рівними можливостями, які зацікавлені у встановленні «цивілізованих» правил гри, чим і є демократія.

Такі цивілізовані правила гри свого часу виникли в древній Греції. Демократична форма правління сприяла появі певних дуже специфічних саме для демократичного устрою умінь і навичок, наприклад, уміння логічно мислити і доводити свою правоту в дискусіях.

Про важливість такого роду умінь і навичок у давні (і не дуже) часи свідчить хоча б той факт, що два з трьох предметів тривіуму (граматика, діалектика і риторика) навчали саме цьому: вміти чітко і логічно викладати свої думки.

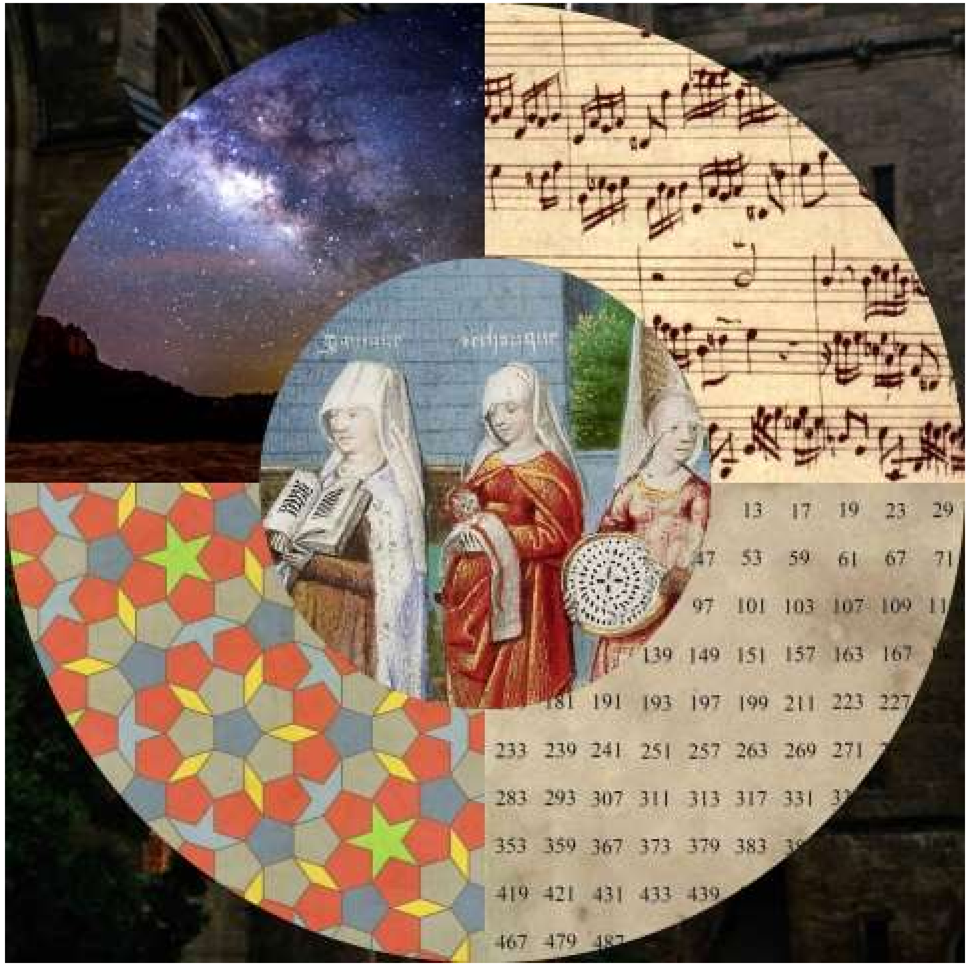
Після тривіуму вчили квадривіум (арифметика, геометрія, музика та астрономія). Причому ця традиція семи вільних мистецтв (Liberal Arts) чи умінь, якими повинна оволодіти вільна людина, тягнеться ще від часів Академії Платона (400 р. до н.е.). Ось ці 7 вільних мистецтв:

граматика, діалектика, риторика, музика, арифметика, геометрія, астрономія.

квадривіум

астрономія

музика



геометрія

арифметика

тривіум

Логіка, вона ж діалектика,
(один із трьох предметів тривіуму)
була формалізована
(тобто переведена на наукову основу)
ще в часи Арістотеля (384 – 322 до н.е.),
автора зібрання текстів під назвою «Органон», що використовувався як стандартний підручник з логіки і складався із шести частин:

- Categoriae
- De Interpretatione
- Analytica Priora
- Analytica Posteriora
- Topica
- De Sophisticis Elenchis

Арістотель (384-322 до н.е.)

В **Analytica Priora** Арістотель дискутує поняття силогізму, тобто правил формального виведення, в **Analytica Posteriora** – описує, як формальні доведення повинні виглядати:

- Усі доведення мають базуватися на вже відомих принципах. Ці відомі принципи повинні бути або самі вже доведені, або бути так званими первинними самоочевидними принципами, тобто аксіомами.
- Не можна доводити тверджень циркулярним способом і також у доведеннях не повинно бути нескінченної кількості проміжних кроків.
- Деякі доведення доводять лише існування, в той час як інші пояснюють причину існування, і саме такі доведення мають більшу цінність.
- Прямі доведення кращі, ніж доведення від супротивного.

Принципи дедуктивної математики

Таким чином, вже Арістотель чітко розумів принципи, на яких мала б будуватися дедуктивна математика:

- 1) Усі математичні твердження мають бути доведені на основі вже відомих тверджень.
- 2) Оскільки доведення скінченні і не мають циклів, то мають бути первинні принципи, які приймають без доведення. Бажано, щоб такі твердження були якомога простішими і самоочевидними.
- 3) Усі поняття (про які йде мова в теоремах) мають бути означеними на основі вже означених понять.
- 4) Через подібні з доведеннями причини (скінченність ланцюжків доведень та відсутність циклів) система означень повинна базуватися на певних первинних неозначуваних поняттях, які мають бути максимально простими та інтуїтивно зрозумілими.

Елементи Евкліда

Саме ці принципи реалізував у своїх «Елементах…» давньогрецький математик Евклід ($\approx$300 р. ВС), який жив після Арістотеля та перед Архімедом.

«Елементи» Евкліда вважається найвпливовішою (після Біблії) книгою в історії людської цивілізації.

«Елементи» складаються з 13-ти книг,
які охоплюють, в основному, сучасну програму вивчення математики в Середній Школі.

Англійський переклад 1570 року

Короткий зміст 13-ти книг Евкліда

- Книга 1 починається з 5 постулатів та 5 загальних понять і містить базову теорію трикутника, включно з теоремою Піфагора
- Книга 2 присвячена геометричній алгебрі і теорії площ
- Книга 3 – теорія кола (знаходження центру, вписані кути, дотичні тощо)
- Книга 4 – правильні многокутники
- Книга 5 – теорія пропорцій Евдокса
- Книга 6 – застосування теорії пропорцій до подібності фігур
- Книга 7 – елементарна теорія чисел, зокрема прості числа, алгоритм Евкліда
- Книга 8 – геометричні послідовності цілих чисел, зокрема золотий переріз
- Книга 9 – доведення нескінченності простих чисел, подільність, досконалі числа
- Книга 10 – ірраціональність квадратних коренів, формула для піфагорових трійок
- Книга 11 – паралельність, перпендикулярність, подібність просторових фігур
- Книга 12 – об'єми просторових тіл (призми, піраміди, кулі)
- Книга 13 – платонівські тіла

5 аксіом (загальних правил) Евкліда

1. Things which equal the same thing also equal one another.
2. If equals are added to equals, then the wholes are equal.
3. If equals are subtracted from equals, then the remainders are equal.
4. Things which coincide with one another equal one another.
5. The whole is greater than the part.

5 геометричних постулатів Евкліда

I. Можна проводити прямі, що з’єднують довільні задані точки.

II. Пряму можна необмежено продовжувати в обидва боки.

III. Можна малювати кола довільного радіуса з довільним центром.

IV. Усі прямі кути рівні між собою.

V. Якщо пряма, що перетинає дві прямі, утворює внутрішні односторонні кути, які менші ніж два прямі кути, то ці дві прямі, продовжені необмежено, зустрінуться з тієї сторони, де кути менші за два прямі.

Серед цих 5-ти постулатів останній вирізняється своєю складністю і більше нагадує теорему, а не аксіому. Тому понад 2000 років математики (марно) старалися довести цей постулат, результатом чого стало відкриття неевклідової геометрії на початку XIX століття.

Неповнота аксіом Евкліда

- Поряд із вдосконаленням Евкліда шляхом доведення 5-го постулату і зменшенням кількості аксіом, були теж спроби вдосконалити аксіоми Евкліда шляхом їхнього розширення.
- Зокрема, Архімед (287 – 212 до н.е.) зрозумів, що певні доведення Евкліда базуються на явно не сформульованому Евклідом принципі, відомому як
- **Аксіома Архімеда**: для довільних відрізків AB і CD існує таке число n, що |CD|>n|AB|.
- Також у доведеннях Евклід жодним чином не обґрунтовував, чому при побудовах існують потрібні точки в перетинах прямих чи кіл.

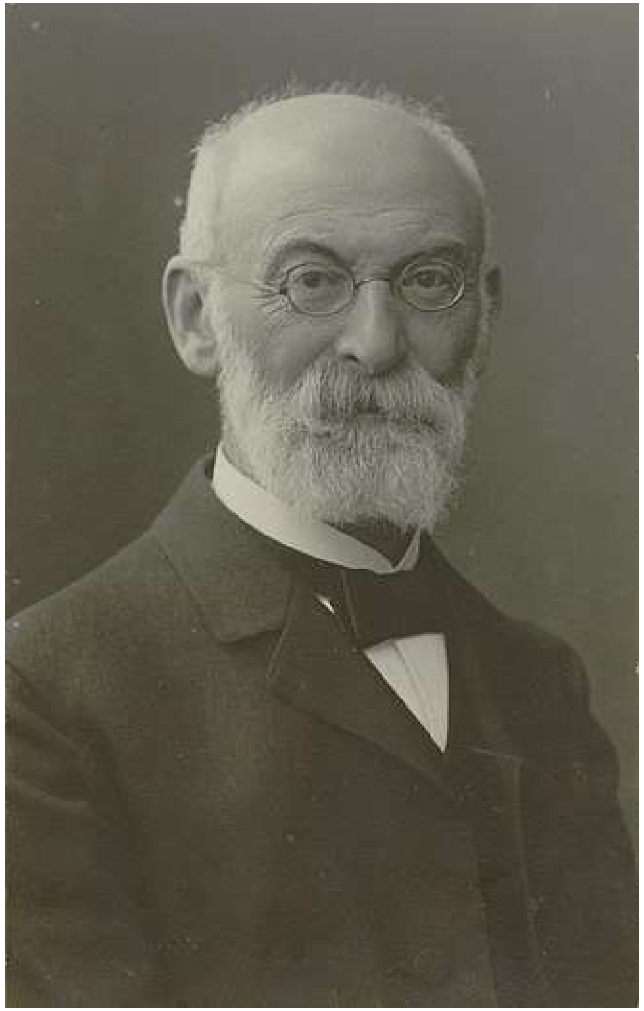
Творення сучасних основ геометрії

Боротьба за строгість у викладі геометрії (і всієї математики) розпочалася в кінці XIX століття. Визначними математиками, які доклалися до перегляду основ геометрії у XIX і XX століттях, були:

- Moritz Pasch (1843 – 1930),
- Guiseppe Peano (1858 – 1932),
- Mario Pieri (1860 – 1913),
- David Hilbert (1862 – 1943),
- George Birkhoff (1884 – 1944),
- Alfred Tarski (1901 – 1983).

The father of rigor in geometry is Pasch.

Hans Freudenthal



Moritz Pasch (1843 – 1930), автор монографій

- *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig 1882;
- *Grundlagen der Analysis*, Leipzig, 1908[3]
- *Mathematik und Logik*, Leipzig, 1919
- *Die Begriffsswelt des Mathematikers in der Vorhalll der Geometrie*, Leipzig, 1922

Паш звернув увагу на необхідність строгих формальних доведень, що не апелюють до геометричних ілюстрацій, і також вказав на важливість неозначеного Евклідом поняття «лежати між», яке вкорінилося в пізніших аксіоматизаціях геометрії Гільберта і Тарського.

Іменем Паша названо відому аксіому геометрії, яка стверджує, що пряма на площині не може перетинати лише одну сторону трикутника. Цим площина відрізняється від простору.

Guiseppe Peano

Джузеппе Пеано (1858 – 1932), дуже цікавий і багатогранний італійський математик, значною мірою приклався до створення сучасної математичної мови і усієї аксіоматично-дедуктивної ідеології сучасної математики.

Наприклад, саме Пеано ввів у математичний вжиток добре відомі теоретико-множинні позначення $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$, $\exists$, які ми постійно використовуємо навіть не задумуючись про їхнє походження (квантор $\forall$ з'явився вперше у Gentzen'а в 1935).

З іншого боку, символами ○ та ● Пеано позначав порожній та універсальний класи відповідно. На жаль, ці позначення не прижилися, хоча сучасне позначення порожньої множини $\emptyset$ не сильно відрізняється від пеанівського кружечка ○. Універсальний клас ● виштовхнула з математичного вжитку панівна на сьогодні аксіоматична система ZFC.

Окрім математики, Пеано займався історичною лінгвістикою і створив «Latino sine Flexione» – спрощену версію латини для науковців. Цією мовою він укладав «*Formulario mathematico*» – математичну енциклопедію, яка містила усі важливі теореми з доведеннями.
Ця енциклопедія мала б відігравати роль, аналогічну до «Елементів» Евкліда, проте час у XX-му столітті біг значно швидше, ніж в часи Евкліда.

Mario Pieri

Mario Pieri (1860 – 1913) був молодшим колегою Пеано, також дописував до його *Folmulario Mathematico*.

Маріо П’єрі відомий своєю аксіоматикою геометрії, викладеною у монографії

Monographia del punto e del moto (1900),

яка була перекладена польською мовою у 1915
і мала значний вплив на молодого Альфреда Тарського.

Smith (2010) описує аксіоматизацію П’єрі як

a full axiomatization of Euclidean geometry based solely on the primitive concepts *point* and *equidistance* of two points *N* and *P* from a third point *O*, written *ON* = *OP.*

П’єрі мав лише два неозначуваних поняття, зате
аж 24 аксіоми, що є трохи забагато як на вивчення
основ геометрії сучасними (нетерпеливими) студентами.

David Hilbert

Один із найвпливовіших математиків останнього тисячоліття.
Серед його численних досягнень важливою для формування сучасних основ геометрії була його монографія

Grundlagen der Geometrie (1899),

у якій він запропонував систему аксіом, поділену на 5 груп (по аналогії з 5-ма постулатами Евкліда).
Аксіоматична система Гільберта використовувала 3 неозначуваних поняття: точка, пряма, площина,
два неозначуваних бінарних відношення:
інцидентність, конґруентність,
і тернарне відношення «лежати між».

Аксіоми Гільберта (23 аксіоми, поділені на 5 груп)

I. **Аксіоми належності** (описують властивості неозначуваного поняття інцидентності)

планіметричні:

1. Якими б не були точки А та В, існує пряма l, якій належать ці точки.

2. Якими б не були дві різні точки А та В, існує не більше однієї прямої, якій належать ці точки.

3. Кожній прямій належать принаймні дві точки.

4. Існують принаймні три точки, що не належать одній прямій.

стереометричні:

5. Довільні три точки належать певній площині.

6. Кожній площині належить принаймні одна точка.

7. Якими б не були три точки, що не належать одній прямій, існує не більше однієї площини, якій належать ці три точки.

8. Якщо пряма має з деякою площиною принаймні дві спільні точки, то усі точки цієї прямої належать вказаній площині.

9. Якщо дві площини мають спільну точку, тоді вони мають ще одну спільну точку.

10. Існують принаймні чотири точки, які не належать одній площині.

II. Аксіоми порядку (описують властивості неозначуваного поняття «лежати між»)

11. Якщо точка B прямої лежить між точками A та C, то A, B і C – різні точки прямої, причому B лежить також між точками C та A.

12. Для довільних двох різних точок A і C, на прямій, що ними визначається, існує принаймні одна точка B, що лежить між точками A та C, та існує принаймні одна точка D, така що точка C лежить між точками A та D.

13. Серед довільних трьох точок, які лежать на одній прямій, існує не більше однієї точки, яка лежить між двома іншими.

14. **Аксіома Паша**. Якщо у довільній площині дано трикутник ABC і довільну пряму, що не проходить через одну з його вершин і перетинає сторону AB, то ця пряма неодмінно перетне одну з двох інших сторін AC чи BC.

III. <u>Аксіоми конгруентності</u> (описують властивості неозначуваного поняття конґруентності)

15. Кожен відрізок AB конґруентний відрізку BA.

16. Якщо A та B – дві точки прямої a, A' – точка на цій прямій a чи на іншій прямій a’, то по задану від точки A' сторону прямої a' знайдеться, і при цьому лише одна, точка B' така, що відрізок A'B' конгруентний відрізку AB.

17. Якщо відрізки A'B' та A''B'' конґруентні одному і тому ж відрізку AB, то вони конґруентні між собою.

18. Нехай AB та BC – два відрізки прямої a, які не мають спільних внутрішніх точок, A'B' і B'C' – два відрізки тієї ж прямої a чи іншої прямої a', які також не мають спільних внутрішніх точок. Тоді якщо відрізок AB конґруентний відрізку A'B', а відрізок BC конґруентний відрізку B'C', то відрізок AC конґруентний відрізку A'C'.

19. Якщо дано кут ∠ABC та промінь B'C', що лежить у площині цього кута, то існує рівно два промені B'D та B'E, які також лежать у площині цього кута, такі, що ∠DB'C' конґруентний ∠ABC та ∠EB'C' конгруентний ∠ABC.

20. Якщо для двох трикутників ABC та A'B'C' справедливі конґруенції: $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, то завжди справедливі конґруенції: $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$, $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$.

IV. Аксіома паралельності:

21. **Аксіома Прокла.** Для довільної прямої *a* та точки *B*, яка їй не належить, існує єдина пряма *b*, що містить точку *B*, не перетинає прямої і міститься в одній площині з прямою *a*.

V. Аксіоми неперервності

22. **Аксіома Архімеда**. Для довільних точок A_0, B та точки A_1, що лежить між точками *A* та *B,* існує натуральне число n і така послідовність точок $A_2, A_3, \dots, A_n$, що точка *B* лежить між A_0, B і $A_i A_{i+1} \cong A_0 A_1$ для кожного $i < n$.

23. **Аксіома повноти.** Точки прямої (площини) утворюють таку систему точок, яку неможливо доповнити новими точками без порушення раніше встановлених аксіом.

Аксіоматика Гільберта має очевидні недоліки:

- вона дуже громіздка (6 неозначуваних понять і 23 аксіоми, які маскують під 20 аксіом, об’єднуючи деякі з них в одну);
- аксіома повноти Гільберта є аксіомою швидше з теорії моделей, а не з геометрії, і для її строгого формулювання треба залучати всю потугу теорії множин;
- Аксіоматика Гільберта не вписується в сучасну парадигму математичних структур Бурбакі (які дали означення математиці як науки про математичні структури).

Тим не менше, завдяки авторитету Гільберта та ясності і структурованості його викладу аксіоматика Гільберта широко використовується при викладанні (основ) геометрії у вищій та середній школах. Проте, громіздкість цієї аксіоматики не сприяє популярності геометрії у наш технологічний час, коли люди втратили здатність перетравлювати довгі куски тексту.

Теорія множин Кантора

З часу написання Гільбертом його
Grundlagen der Geometrie (1899 рік)
у математиці сталися тектонічні зміни: вона повністю перейшла на формальну теоретико-множинну мову.

Завдяки Кантору та його теорії множин вдалося обґрунтувати всю математику (включно з геометрією) всього лиш на двох неозначуваних поняттях: «множина» та «елемент».

Інтуїтивно, множина – це довільна сукупність об’єктів, які можна об’єднати за тою чи іншою ознакою.
Як писав сам Кантор (у перекладі на англійську),

Georg Cantor
(1845 – 1918)

A set is a Many that allows itself to be thought of as a One.

Далі буде!

LVIV MATH SOCIETY

Лекції відбуваються під егідою
Львівського Математичного Товариства.

Будемо вдячні за підтримку.

ПриватБанк

ГО ЛЬВІВСЬКЕ
МАТЕМАТИЧНЕ
ТОВАРИСТВО

Членські внески

1. Завантажте додаток Приват24 на pb.ua/apps
2. Увійдіть у додаток та натисніть
3. Відскануйте QR-код
4. Оберіть картку для оплати