



## Основи Геометрії

чим є евклідова геометрія і яке її місце в сучасній теоретико-множинній парадигмі математичних структур Бурбакі?

## Академія Платона (387 – 86 до н.е.)



Фреска з Помпеї ≤ 79 р. н. е.



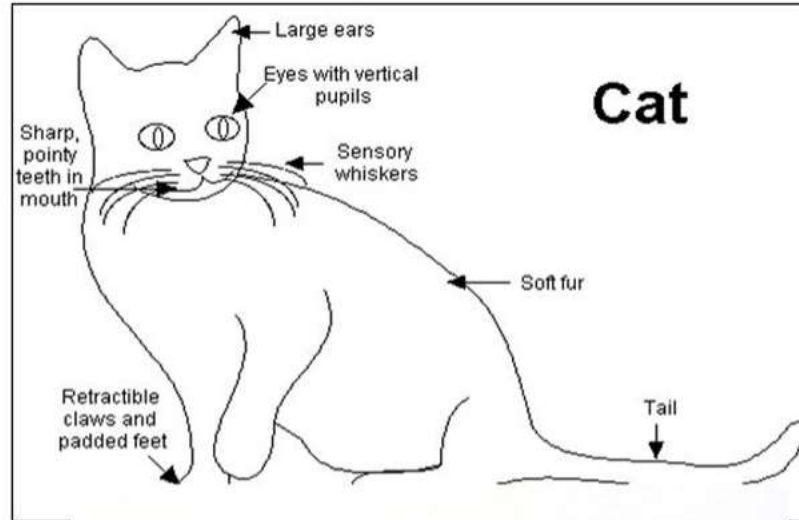
Фреска Рафаеля у Ватиканському палаці, 1509.

# Метафізика Платона

*Ідеї реальні – вони реальніші за речі*

Платон, 427-347 д.н.е.

**Світ ідей  
(або форм)**



**Світ речей  
(реалізації ідей)**

**2  
цукерки**



**Теорії:  
поняття,  
предикати,  
аксіоми,  
теореми**

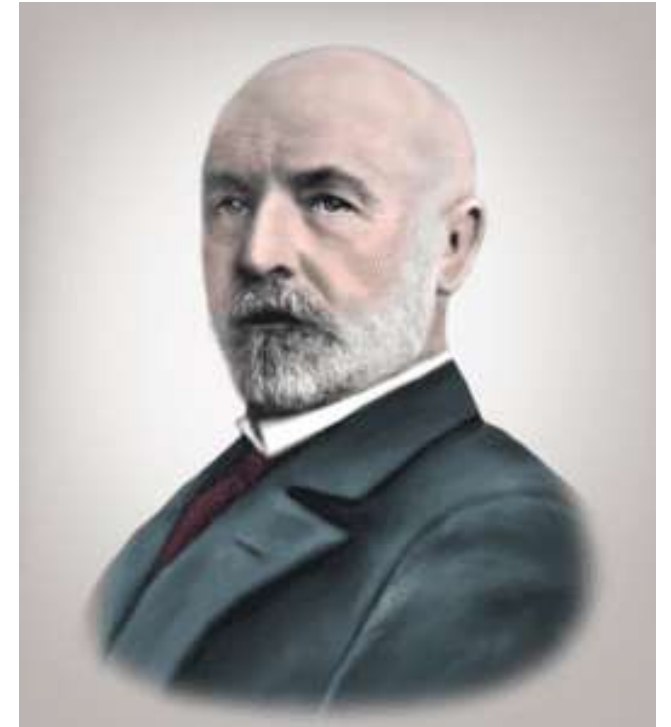
**Інтерпретації:  
множини,  
елементи,  
відношення,  
Моделі**

# Теорія множин Кантора

З часу написання Гільбертом його *Grundlagen der Geometrie* (1899 рік) у математиці сталися тектонічні зміни: вона повністю перейшла на формальну теоретико-множинну мову.

Завдяки Кантору та його теорії множин вдалося обґрунтувати всю математику (включно з геометрією) всього лиш на двох неозначуваних поняттях: «множина» та «елемент».

Інтуїтивно, **множина** – це довільна сукупність об'єктів, які можна об'єднати за тою чи іншою ознакою. Як писав сам Кантор (у перекладі на англійську),



Georg Cantor  
(1845 – 1918)

*A set is a Many that allows itself to be thought of as a One.*

# Теорія множин Кантора

*Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen,  
soll uns niemand vertreiben können*

David Hilbert

Згідно з теорією множин, будь-який математичний об'єкт є множиною, тобто математика, фактично, вивчає множини.

Одні множини можуть бути (або не бути) елементами інших множин. Той факт, що множина  $x$  є елементом множини  $y$ , позначається  $x \in y$ .

Дві множини  $x, y$  називають рівними і пишуть при цьому  $x = y$ , якщо ці множини мають однакові елементи, тобто  $\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y)$ .

Множину, яка не містить жодного елемента, називають **порожньою** і позначають символом  $\emptyset$ .

Множину елементів  $x_1, x_2, \dots, x_n$  позначають за допомогою фігурних дужок як

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

# Конструктори множин

Окрім перераховування усіх елементів (що є можливим лише у скінченному випадку), множини можна створювати за допомогою так званого **конструктора**  $\{x: Px\}$ , що задає множину, елементами якої є ті і лише ті множини, що мають певну спільну властивість  $Px$ , наприклад, належати до певної множини  $A$ . У цьому випадку  $A = \{x: x \in A\}$ .

Наприклад, коло на площині можна означити за допомогою конструктора як множину точок площини, що лежать на сталій віддалі від фіксованої точки площини, що зветься центром кола.

За допомогою конструкторів означуються алгебраїчні операції над множинами.

# Операції над множинами

Над множинами можна здійснювати операції, що нагадують звичні нам операції над числами.

А саме, для двох множин  $X, Y$  можна розглядати їхнє

- об'єднання  $X \cup Y := \{z: z \in X \vee z \in Y\}$ ,
- перетин  $X \cap Y := \{z: z \in X \wedge z \in Y\}$ ,
- різницю  $X \setminus Y := \{z: z \in X \wedge z \notin Y\}$ ,
- добуток  $X \times Y := \{\langle x, y \rangle: x \in X \wedge y \in Y\}$ ,

де  $\langle x, y \rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$  -- **впорядкована пара** множин  $x, y$ .

Таке означення для впорядкованої пари запропонував Казімір Куратовський у 1921 році і воно має потрібну властивість, яку очікують від впорядкованих пар:

$$\langle x, y \rangle = \langle a, b \rangle \Leftrightarrow (x = a \wedge y = b).$$

Впорядковані  $n$ -ки множин  $x_1, x_2, \dots, x_n$  означаються рекурсивною формулою

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle := \langle \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle, x_n \rangle.$$



**K. Kuratowski**  
(1896 – 1980)

# Відношення та функції

**Означення:** Бінарним відношенням називається довільна множина, елементами якої є впорядковані пари.

**Означення:** Функцією  $F: X \rightarrow Y$  з множини  $X$  в множину  $Y$  називається бінарне відношення  $F \subseteq X \times Y$ , таке що  $\forall x \in X \exists! y \in Y \langle x, y \rangle \in F$ .

Це єдине  $y$  називається значенням функції  $F$  в  $x$  і позначається через  $F(x)$ .

**Означення:** Функція  $F: X \rightarrow Y$  називається

- ін'єктивною, якщо  $\forall x, y \in X (F(x) = F(y) \rightarrow x = y)$ ;
- сюр'єктивною, якщо  $\forall y \in Y \exists x \in X F(x) = y$ ;
- бієктивною, що функція  $F$  сюр'єктивна та ін'єктивна.

**Експонента:** Для множин  $X, A$  через  $X^A$  позначається множина усіх функцій з  $A$  в  $X$ .

**Приклад:**  $\emptyset^\emptyset = \{\emptyset\}$ .

# Натуральні числа в теорії множин

Теорія множин дає можливість строго означити таке здавалося б абстрактне та фундаментальне поняття як натуральне число:

$$0 := \{ \} = \emptyset$$

$$1 := \{0\}$$

$$2 := \{0,1\}$$

$$3 := \{0,1,2\}$$

...

$$\omega := \{0,1,2,3, \dots\}$$

До речі, Пеано не наважився означувати натуральні числа.

Він лише обмежив їх відомими аксіомами Пеано, що постулюють властивості, якими можна користуватися при оперуванні з натуральними числами.

Leopold Kronecker (1823-1891) про натуральні числа писав так:

**Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.**

# Яким чином відбувався цей Menschenwerk?

Розвиток математики і її застосувань мотивував введення все ширших числових множин:

$$\mathbf{N} \subset \omega \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$$

Ці числові множини можна означувати аксіоматично (як об'єкти довільної природи, що задовольняють певні аксіоми, які описують потрібні властивості тих чи інших чисел), але теорія множин дозволяє побудувати їхні «канонічні» моделі.

Починаємо з множини  $\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ , яка означається як найменша індуктивна множина. При цьому множина  $X$  називається *індуктивною*, якщо

$$\emptyset \in X \wedge \forall x (x \in X \rightarrow x + 1 \in X), \text{ де } x + 1 = x \cup \{x\} \text{ для довільної множини } x.$$

Віднімаючи від множини  $\omega$  нуль, отримуємо звичну (для нас) множину натуральних чисел

$$\mathbf{N} := \omega \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

На множині  $\omega$  вводиться лінійний порядок  $<$  формулою  $n < m \Leftrightarrow n \in m$  і означаються операції додавання та множення рекурсивними формулами

$$x + (y + 1) := (x + y) + 1 \text{ та } x \cdot (y + 1) := x \cdot y + x.$$

# Цілі та раціональні числа

Необхідність доповнення натуральних чисел від'ємними, виникла з потреби віднімання довільних натуральних чисел. Множину цілих чисел  $\mathbf{Z}$  можна означувати різними способами, але найпростіший і найприродніший такий:

$$\mathbf{Z} := \omega \cup \{-n : n \in \mathbf{N}\}, \text{ де } -n = 0 - n := \langle 0, n \rangle.$$

На множину цілих чисел природно продовжуються лінійний порядок та арифметичні операції зі збереженням (та примноженням) їхніх властивостей.

Аналогічним чином розширюємо множину цілих чисел до множини раціональних чисел:

$$\mathbf{Q} := \mathbf{Z} \cup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbf{Z}, \text{ НСД}(m, n) = 1 < n \right\}, \text{ де } \frac{m}{n} := \langle m, n \rangle.$$

На множину раціональних чисел природно поширюється лінійний порядок та арифметичні операції зі збереженням (та примноженням) їхніх властивостей.

# Дійсні числа

Множина дійсних чисел означається як об'єднання

$$\mathbf{R} := \mathbf{Q} \cup \{x: x \text{ — ірраціональне число}\},$$

причому **ірраціональним числом** називаємо

впорядковану пару множин  $\langle A, B \rangle$ ,

що задовольняють аксіоми:

- $A \cup B = \mathbf{Q}$  і  $A \neq \emptyset \neq B$ ,
- $\forall a \in A \forall b \in B (a < b)$ ,
- $\forall a \in A \exists a' \in A (a < a')$ ,
- $\forall b \in B \exists b' \in B (b' < b)$ .

Наприклад,

$$\sqrt{2} := \langle \{x \in \mathbf{Q}: (x < 0) \vee (x^2 < 2)\}, \{x \in \mathbf{Q}: (x > 0) \wedge (x^2 > 2)\} \rangle.$$

Таку модель дійсного числа придумав Ріхард Дедекінд у 1860.



**Richard Dedekind**  
(1831-1916)

# Комплексні числа

Для дійсних чисел  $x, y$ , множина

$$x + iy := x \cup (\{1\} \times y)$$

називається **комплексним числом**, а дійсні числа  $x$  та  $y$  називаються його **дійсною** та **уявною частиною**, відповідно.

Оскільки  $x + i0 = x \cup (\{1\} \times \emptyset) = x \cup \emptyset = x$ , множина дійсних чисел  $\mathbf{R}$  міститься у множині комплексних чисел  $\mathbf{C} := \{x + iy : x, y \in \mathbf{R}\}$ .

Операції додавання та множення комплексних чисел визначаються добре відомими формулами:

$$(a + ib) + (x + iy) := (a + x) + i(b + y) \text{ та}$$
$$(a + ib) \cdot (x + iy) := (ax - by) + i(bx + ay).$$

# Арифметична модель Евклідової площини

За допомогою арифметичної моделі  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  геометрії та аналітичної геометрії, евклідову геометрію можна звести до теорії дійсного числа. У цій моделі «точками» є впорядковані пари дійсних чисел, «прямими» множини «точок», що задовольняють рівняння прямої, відрізки «конгруентні», якщо вони мають однакову довжину і т.д.

Проте така модель не зовсім адекватно описує властивості «природної» площини, бо «природна» площина не має ні фіксованого початку координат, ні наперед заданих координатних осей, ні зафіксованої одиниці довжини, які присутні в арифметичній моделі.

Тобто арифметична модель має забагато деталей, яких не передбачалося в тому «божественному проєкті» геометрії, який ми маємо щастя бачити навколо себе.

Щоб зрозуміти суть цього «божественного проєкту» треба ще трохи поговорити про формалізацію логіки. Навіщо? Щоб уникнути можливих парадоксів на «рівному місці».

# Парадокс Бері

Назвемо натуральне число  $n$  **малим**, якщо його можна охарактеризувати деякою властивістю, формулювання якої потребує менше ніж 100 символів певного фіксованого алфавіту. В іншому випадку число будемо називати **великим**.



**Bertrand Russel**  
(1872—1970)

Наприклад, **нуль** – мале число, бо це «нейтральний елемент відносно додавання», **одиниця** – мале, бо це «нейтральний елемент відносно множення», **два** – мале, бо це «найменше просте число», і **три** теж мале, бо це «найменше непарне просте число» і т.д. Очевидно, що коротких слів скінченна кількість, точніше їх є не більше ніж  $a^{100}$ , де  $a$  – кількість символів у алфавіті.

Нехай  $m$  – «**найменше велике число**». Зрозуміло, що число  $m$  – велике. З іншого боку, воно характеризується властивістю, формулювання якої використовує <100 символів і тому число  $m$  – мале. Як розв'язувати таку суперечність?

# Кожне натуральне число має певну цікаву властивість

Парадокс Бері суголосний із жартівливою теоремою, яку я почув від Давідовіча (внука Хвістека) у 2019 на конференції РТМ100:

**«Теорема»:** *Кожне натуральне число має певну цікаву властивість.*

*Доведення.* Назвемо число **цікавим**, якщо воно має певну цікаву властивість, і **нецікавим** у протилежному випадку. Якщо й існували нецікаві натуральні числа, то ми могли б розглянути найменше нецікаве число, яке насправді має дуже цікаву властивість: **воно є найменшим серед нецікавих чисел!** Ця суперечність доводить, що нецікавих чисел не існує й тому усі числа цікаві.



**Antoni Leon Dawidowicz**  
(1952 – 2022)

# Як боротися з парадоксом Бері?

За допомогою формальної логіки, що дає змогу строго означити поняття «властивості», яку дозволено вживати у конструкторах множин. «Законними» вважаються лише ті властивості, які можна виразити формулами теорії множин.

**Формули теорії множин** – це певні правильно складені слова в алфавіті мови теорії множин.

# Алфавіт теорії множин

Теорія множин є однією з теорій першого порядку.

Її алфавіт складається з

- службових символів:
  - символ належності  $\in$
  - логічні зв'язки  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
  - квантори  $\forall, \exists$
  - дужки ( та )
- символів змінних (довільні символи, відмінні від службових);
- не обов'язково, але корисно: символи для означуваних понять:  
 $=, \emptyset, \cap, \cup, \subseteq, \notin, 0, 1, 2, 3, 4, \dots, \omega, \dots$

# Формули теорії множин

Тепер можемо дати строго (індуктивно) означення формули:

- 1) якщо  $x, y$  є символами змінних, тоді слово  $x \in y$  є (атомарною) формулою;
- 2) якщо  $\varphi$  і  $\psi$  є формулами, тоді  $(\neg\varphi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi)$  є формулами;
- 3) якщо  $\varphi$  є формулою, тоді для будь-якого символу змінної  $x$  вирази  $\forall x \varphi$  та  $\exists x \varphi$  – формули;
- 4) інших формул окрім тих, що утворені за правилами 1)–3) немає\*.

\*Слово  $x = y$  є скороченням формули  $\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y)$ ,  
слово  $\forall x \in y \varphi$  є скороченням формули  $\forall x (x \in y \rightarrow \varphi)$ , а  
слово  $\exists x \in y \varphi$  – скороченням формули  $\exists x (x \in y \wedge \varphi)$ .

\* \* \*

Аналогічним чином можна означувати формули інших теорій першого порядку, зокрема, формули геометрії.

# Строге означення означуваної властивості

Для строгого означення *властивості* нам потрібно означити поняття вільної змінної формули.

Кожній формулі  $\varphi$  теорії множин припишемо множину  $Free(\varphi)$  її вільних змінних індукцією по складності формули:

- $Free(x \in y) = \{x, y\}$ ,
- $Free(\neg\varphi) = Free(\varphi)$ ,
- $Free(\varphi \wedge \psi) = Free(\varphi \vee \psi) = Free(\varphi \rightarrow \psi) = Free(\varphi \leftrightarrow \psi) = Free(\varphi) \cup Free(\psi)$ ,
- $Free(\forall x \varphi) = Free(\exists x \varphi) = Free(\varphi) \setminus \{x\}$ .

Коли ми записуємо формулу як  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  маємо на увазі, що  $Free(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ .

Якщо  $\varphi(x, c_1, \dots, c_n)$  – формула з вільними змінними  $x, c_1, \dots, c_n$ , то для фіксованих множин  $c_1, \dots, c_n$  ця формула описує певну властивість  $\Phi$  множини  $x$ . У цьому випадку кажуть, що властивість  $\Phi$  виражається формулою  $\varphi$  і отже є *означувальною* (англійською , *definable*).

# Усунення парадоксів теорії множин

Обмежуючись в конструкторах множин  $\{x: Px\}$  лише використанням означуваних властивостей, ми позбуваємося парадоксу Бері, оскільки властивість натурального числа мати коротке (чи довге) означення містить кватор по формулах і тому не виражається формулою теорії множин.

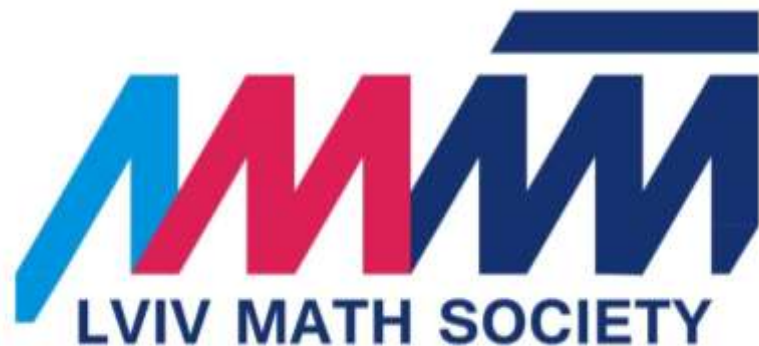
Цей підхід усуває парадокс Бері, проте залишає в силі знаменитий парадокс Рассела, який стверджує, що Пеанівський універсальний клас  $\bullet = \{x: x = x\}$  не є множиною. Для усунення парадоксу Рассела слід покинути наївну теорію множин і переходити до аксіоматичної теорії множин ZFC або аксіоматичної теорії класів NBG, але це виходить поза межі цих лекцій. Більше на цю тему можна дізнатися у монографії:

T. Banach, *Classical Set Theory: Theory of Set and Classes*, (<https://arxiv.org/abs/2006.01613>).

Сучасна математика неможлива без математичної логіки, до розвитку якої доклалися такі гіганти думки:

- **Αριστοτέλης** (384 – 322 до н.е.)
- **Augustus de Morgan** (1806 – 1871)
- **George Boole** (1815 – 1864)
- **Charles Peirce** (1839-1914)
- **Gottlob Frege** (1848 – 1925)
- **Guiseppe Peano** (1858 – 1932)
- **David Hilbert** (1862 – 1943)
- **Bertrand Russell** (1872 – 1970)
- **Alfred Tarski** (1901 – 1983)
- **Kurt Gödel** (1906 – 1978)

Далі буде!



Лекції відбуваються під егідою  
Львівського Математичного Товариства.

Будемо вдячні за підтримку.



ГО ЛЬВІВСЬКЕ  
МАТЕМАТИЧНЕ  
ТОВАРИСТВО

## Членські внески



- 1 Завантажте додаток Приват24 на [pb.ua/apps](https://pb.ua/apps)
- 2 Увійдіть у додаток та натисніть 
- 3 Відскануйте QR-код
- 4 Оберіть картку для оплати