



Основи Геометрії

чим є евклідова геометрія і яке її місце в сучасній теоретико-множинній парадигмі математичних структур Бурбакі?

Академія Платона (387 – 86 до н.е.)



Фреска з Помпеї ≤ 79 р. н. е.



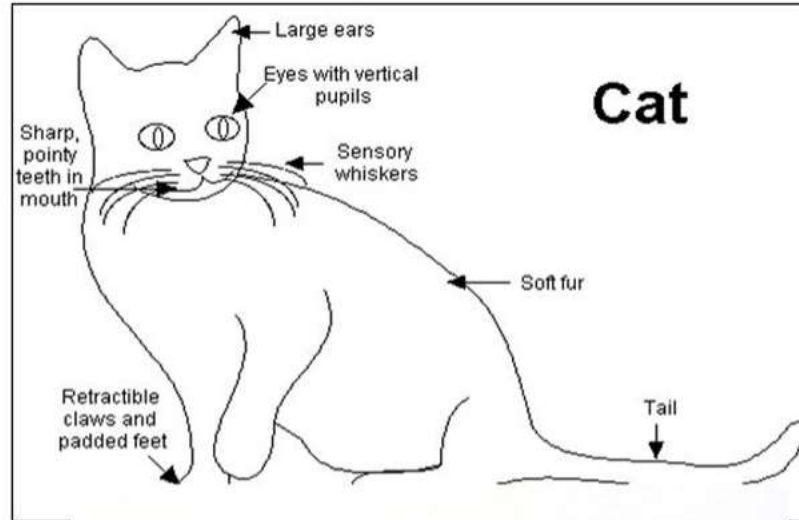
Фреска Рафаеля у Ватиканському палаці, 1509.

Метафізика Платона

Ідеї реальні – вони реальніші за речі

Платон, 427-347 д.н.е.

**Світ ідей
(або форм)**



**Світ речей
(реалізації ідей)**

**2
цукерки**



**Теорії:
поняття,
предикати,
аксіоми,
теореми**

**Інтерпретації:
множини,
елементи,
відношення,
Моделі**

Строге означення математики (a la Bourbaki)

Математика – наука про математичні структури, дослівно:

Mathematics has less than ever been reduced to a purely mechanical game of isolated formulas; more than ever does intuition dominate in the genesis of discoveries. But henceforth, it possesses the powerful tools furnished by the theory of the great types of structures; in a single view, it sweeps over immense domains, now unified by the axiomatic method, but which were formerly in a completely chaotic state.

“The Architecture of Mathematics”,
Bourbaki, 1950



Charles-Denis Sauter Bourbaki
(1816 – 1897)

Nicolas Bourbaki – колективний псевдонім групи французьких математиків, створеної в 1935 році з метою повторити подвиг Евкліда і створити нові підручники з вищої математики як науки про математичні структури, використовуючи мову теорії множин.



Henri Cartan



André Weil



René de Possel



Charles Ehresmann



Laurent Schwartz



Jean Dieudonné



Claude Chevalley



Pierre Samuel



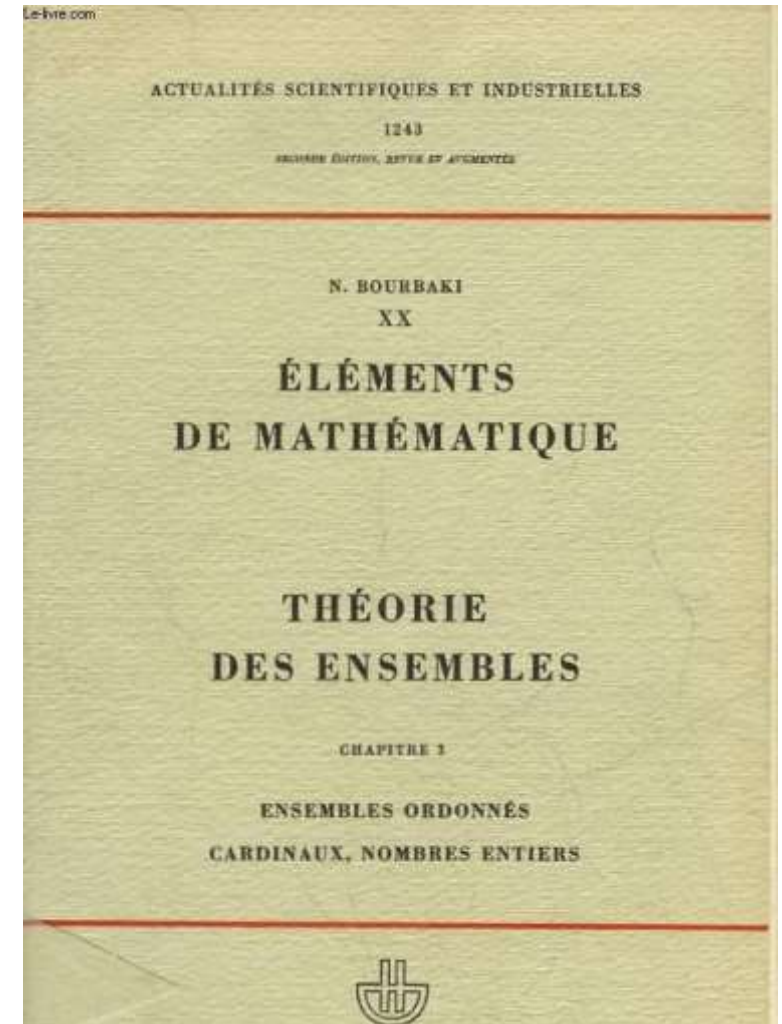
Jean-Pierre Serre



Adrien Douady

N. Bourbaki: *Éléments de mathématique*

- I. *Théorie des ensembles* (1939)
- II. *Algèbre* (1942)
- III. *Topologie générale* (1940)
- IV. *Fonctions d'une variable réelle* (1949)
- V. *Espaces vectoriels topologiques* (1953)
- VI. *Intégration* (1952)
- VII. *Groupes et algèbres de Lie* (1972)
- VIII. *Algèbre commutative* (1961)
- IX. *Théories spectrales* (1967)
- X. *Variétés différentielles et analytiques* (1967)
- XI. *Topologie algébrique* (2016)
- XII. *Éléments d'histoire des mathématiques* (1960)



Практично всі важливі математичні структури присутні на дійсній прямій, яка є одночасно:

орієнтованим графом, частково впорядкованою множиною, лінійно впорядкованою множиною, унаром, магмою, напівгрупою, групою, кільцем, полем, впорядкованою групою, впорядкованим полем, метричним простором, топологічним простором, рівномірним простором, грубим простором, лінійним простором, білінійним простором, простором зі скалярним добутком, нормованим простором, банаховим простором, банаховою алгеброю, передгільбертовим простором, гільбертовим простором і т.д.

Питання: *Яка математична структура описує геометрію Евкліда?*

Чи існує виклад евклідової геометрії як однієї з математичних структур?

Дивно, але Бурбакі у своїх «Елементах» не дали відповіді на це питання...

What is a good definition of a mathematical structure?

Asked 2 years, 10 months ago Modified 2 years, 7 months ago Viewed 712 times



4



At the moment I am writing a textbook in Foundations of Mathematics for students and trying to give a precise definition of a mathematical structure, which is the principal notion of structuralist approach to mathematics, formed by Bourbaki. Intuitively (and on many examples) the notion of a mathematical structure is clear: this is a pair (X, S) consisting of a set X , endowed with a structure S , which is a set somehow related to X . This relation of S to X is well-defined in universal algebras or first-order theories. What about the general case?

* * *

I have a strong feeling that such questions has been already studied (and some standard terminology has been elaborated), but cannot find (simple) answers browsing the Internet. I would appreciate any comments on these foundational questions.

reference-request

ct.category-theory

model-theory

foundations

[Edit tags](#)

[Share](#) [Cite](#) [Edit](#) [Close](#) [Delete](#) [Flag](#)

edited Jun 15, 2020 at 7:27



Community Bot

asked May 21, 2020 at 11:21



Taras Banakh

Вибрані коментарі:

- 2 ▲ I often see Bourbaki's structures quoted, but it never includes the definition (e.g., the "[mathematical structure](#)" [Wikipedia page](#) says essentially nothing about them— what they say suggest that the writer had little idea about what they are). I see little point in quoting them if one completely ignores their formalism, which is precisely defined. – YCor May 21, 2020 at 13:18 ✎

@YCor By the way, what is the definition of a mathematical structure according to Bourbaki?
– Taras Banakh May 21, 2020 at 13:44

- 1 ▲ I once open the book at the right pages and it would take a while to read and understand, and I didn't so far. But it's your own question: quoting the "structuralist approach due to Bourbaki" let assume that you have an idea about what is it. – YCor May 21, 2020 at 13:49 ✎

@YCor What is totally strange is that in French Wikipedia there is no page "Mathematical Structures" at all! But this should be the first language where this Bourbakist notion had to be explained! Moreover that there are whole books explaining the importance of mathematical structures of Bourbaki to the modern development of mathematics. Isn't it strange? – Taras Banakh May 21, 2020 at 13:49

- 2 ▲ France or French Wikipedia has particular responsibility to advertise Bourbaki's foundations. I'm not sure what you mean with "whole books", but certainly I see no point in quoting work when one has no idea about what it is. – YCor May 21, 2020 at 13:53

@YCor On one hand, every mathematician has a (I suspect vague) idea what is a mathematical structure via examples. The precise definition is somewhat escaping as well as the precise definition of the subject of mathematics. What does it study? We should somehow to answer this question teaching students the course in Foundations of Mathematics. After thinking a bit I arrived to the definition I suggested in my question: a mathematical structure is a pair of sets (or better classes) (X, S) which are related somehow, i.e., via precisely defined formulas of Set Theory. – Taras Banakh May 21, 2020 at 13:55

Математичні структури

Означення: Математичною структурою називається впорядкована пара (X, S) двох множин, що задовольняє певний список A аксіом, характерних для цієї математичної структури. Аксіомою називається формула $\varphi(X, S, C_1, \dots, C_n)$ з вільними змінними X, S, C_1, \dots, C_n , серед яких C_1, \dots, C_n є певними фіксованими множинами (параметрами).

Наприклад, для векторних просторів над полем F це поле виступає як параметр в аксіомах векторного поля, а для метричних просторів таким параметром є множина дійсних чисел \mathbf{R} .

Для математичної структури (X, S) , множина X називається її носієм (underlying set), а S – структурою математичної структури.

Залежно від вигляду аксіом зі списку A , математичні структури поділяються на елементарні (для них аксіоми містять лише квантори виду $\forall x \in X$ або $\exists x \in X$) та неелементарні (різного порядку складності, наприклад для другого порядку дозволено мати квантори $\forall A \subseteq X^n$ чи $\exists A \subseteq X^n$, які перебирають відношення на X).

Також розрізняють базові структури (порядкові, алгебраїчні, метричні, топологічні) та складені структури (тобто комбінації базових структур).

Приклади порядкових математичних структур

Def. *Графом* називається математична структура (V, E) , що складається з множини *вершин* V та множини *ребер* $E \subseteq \{\{a, b\}: a, b \in V\}$.

Def. *Діграфом* називається математична структура (V, E) , що складається з множини *вершин* V та множини *орієнтованих ребер* $E \subseteq V \times V$.

Через xEy зручно позначати формулу $\langle x, y \rangle \in E$.

Def. *Квазівпорядкованою множиною* називається діграф (V, E) , структура E якого *транзитивна*: $\forall x, y, z (xEy \wedge yEz \rightarrow xEz)$.

Def. *Впорядкованою множиною* називається квазівпорядкована множина (V, E) , структура E якої *антисиметрична*: $\forall x, y (xEy \wedge yEx \rightarrow x = y)$.

Def. *Лінійно впорядкованою множиною* називається впорядкована множина (V, E) , структура E якої *лінійна*: $\forall x, y \in V (xEy \vee yEx \vee x = y)$.

Приклад. Числові множини $\mathbf{N} \subset \omega \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ лінійно впорядковані порядками \leq або $<$.

Ізоморфізми та автоморфізми математичних структур

Означення (інтуїтивне): Ізоморфізмом математичних структур (X, S) та (X', S') називається бієктивне відображення $f: X \rightarrow X'$, що відображає структуру S на структуру S' (в певному сенсі, залежному від типу математичних структур). Дві математичні структури називають ізоморфними, якщо між ними існує ізоморфізм.

Автоморфізмом математичної структури називається її ізоморфізм в себе.

Приклад: Ізоморфізмом діграфів (V, E) та (V', E') називається таке бієктивне відображення $f: V \rightarrow V'$, що $E' = \{(f(x), f(y)) : (x, y) \in E\}$.

Однією з важливих задач математики є характеристизація математичних структур з точністю до ізоморфізму, а також дослідження групи автоморфізмів даної математичної структури.

Означення: Математична структура (X, S) називається жорсткою (англ. **rigid**), якщо її єдиним автоморфізмом є тотожне відображення $1_X: X \rightarrow X$.

Характеризація порядку на \mathbf{N}

Теорема (фольклор): Лінійно впорядкована множина (X, E) ізоморфна лінійно впорядкованій множині $(\mathbf{N}, <)$ натуральних чисел тоді і лише тоді, порядок E **строгий** (тобто $\forall x (\neg xEx)$), множина X нескінченна, але для кожного $y \in X$ початковий інтервал $\overline{Ey} = \{x: xEy\}$ є скінченною множиною.

Ця характеристика використовує поняття скінченної множини, яке є неелементарним і для свого формулювання потребує залучення множини натуральних чисел. Проте його можна переформулювати в логіці другого порядку, замінюючи скінченність скінченністю за Дедекіндом.

Означення: Множина X називається

- **скінченною**, якщо існує бієктивна функція $F: X \rightarrow n \in \omega$;
- **скінченною за Дедекіндом**, якщо кожна ін'єктивна функція $F: X \rightarrow X$ є сюр'єктивною, що виражається в логіці 2-го порядку формулою:

$$\forall F \subseteq X^2 \left((\forall x \forall y \forall u \forall v \left((xFy \wedge uFv) \rightarrow (x = u \leftrightarrow y = v) \right) \wedge \forall x \exists y xFy) \rightarrow \forall y \exists x xFy \right).$$

Характеризація порядку на \mathbb{Z}

Теорема (фольклор): Лінійно впорядкована множина (X, E) ізоморфна лінійно впорядкованій множині $(\mathbb{Z}, <)$ цілих чисел тоді і лише тоді, коли

1. порядок E строгий, тобто $\forall x (\neg xEx)$;
2. X необмежена зверху, тобто $\forall x \exists y xEy$;
3. X необмежена знизу, тобто $\forall x \exists y yEx$;
4. $\forall x, y \in X$ множина $\overline{xE} \cap \overline{Ey} = \{z: xEz \wedge zEy\}$ скінченна.

Зауваження: Перші три умови елементарні (записані в логіці 1-го порядку), а остання може бути виражена в логіці 2-го порядку.

Характеризація порядку на \mathbb{Q}

Теорема (Cantor): Лінійно впорядкована множина (X, E) ізоморфна лінійно впорядкованій множині $(\mathbb{Q}, <)$ раціональних чисел тоді і лише тоді, коли

1. порядок E строгий, тобто $\forall x (\neg xEx)$;
2. X необмежена зверху, тобто $\forall x \exists y xEy$;
3. X необмежена знизу, тобто $\forall x \exists y yEx$;
4. порядок E щільний, тобто $\forall x \forall y (xEy \rightarrow \exists z (xEz \wedge zEy))$;
5. множина X зліченна.

Зауваження: Перші чотири умови записані в логіці 1-го порядку, а остання – виражається у логіці 2-го порядку.

Характеризація порядку на \mathbf{R}

Теорема (Cantor): Лінійно впорядкована множина (X, E) ізоморфна лінійно впорядкованій множині $(\mathbf{R}, <)$ дійсних чисел тоді і лише тоді, коли

- порядок E **строгий**, тобто $\forall x (\neg xEx)$;
- порядок E **щільний**, тобто $\forall x \forall y (xEy \rightarrow \exists z (xEz \wedge zEy))$;
- X **необмежена зверху**, тобто $\forall x \exists y xEy$;
- X **необмежена знизу**, тобто $\forall x \exists y yEx$;
- порядок E **неперервний**, тобто $\forall A, B \subset X$ виконується умова
$$\emptyset \neq A \times B \subseteq E \rightarrow \exists x \in X (A \times \{x\}) \cup (\{x\} \times B) \subseteq E \cup \{(x, x)\};$$
- існує зліченна підмножина $Q \subseteq X$ така, що $\forall x \forall y (xEy \rightarrow \exists z \in Q (xEz \wedge zEy))$.

Зауваження: Перші чотири умови елементарні, а дві останні – ні.

Теорема Левегейма-Скулема

Наявність аксіом вищих порядків в подібних характеристиках пояснюється наступною фундаментальною теоремою з теорії моделей.

Теорема (Löwenheim–Skolem): Якщо система аксіом 1-го порядку має нескінченну модель, тоді вона має модель довільної нескінченної потужності.

Приклад: Будь-яка модель (X, P) системи аксіом 1-го порядку

- $\forall x (\neg xPx)$
- $\forall x \exists y (xPy)$
- $\forall x \forall y (\neg(xPy \wedge yPx))$
- $\forall x \forall y (xPy \rightarrow \exists z (xPz \wedge zPy))$
- $\forall x \forall y \forall z ((xPy \wedge yPz) \rightarrow xPz)$
- $\forall x, y \in X (xPy \vee yPx \vee x \neq y)$

має нескінченний носій X .

Жорсткі математичні структури

Def: **Автоморфізмом** математичної структури (X, S) називається довільний ізоморфізм $F: X \rightarrow X$ математичної структури (X, S) в себе.

Def: Математична структура (X, S) є **жорсткою**, якщо єдиним автоморфізмом цієї структури є тотожне відображення $1_X: X \rightarrow X$.

Приклад: Лінійно впорядковані простори $(\mathbf{N}, <)$ та $(\omega, <)$ є жорсткими математичними структурами, а $(\mathbf{Z}, <)$, $(\mathbf{Q}, <)$, $(\mathbf{R}, <)$ — ні.

Динамічні математичні структури: унари

Def. *Унаром* називають математичну структуру (X, U) , що складається з множини X та унарної операції $U: X \rightarrow X$.

В теорії динамічних систем унари називають **динамічними системами з дискретним часом**.

Def. Два унари (X, U) , (Y, V) є **ізоморфними**, якщо існує така бієкція $F: X \rightarrow Y$, що $\forall x \in X \ V(F(x)) = F(U(x))$.

Важливим прикладом унару є множина натуральних чисел з унарною операцією наступника $S: x \mapsto x + 1 = x \cup \{x\}$.

Характеризація унарів натуральних та цілих чисел

Теорема (Dedekind, 1888): Унар (X, F) ізоморфний унару натуральних чисел (\mathbf{N}, S) тоді і лише тоді, коли функція $F: X \rightarrow X$ – ін'єктивна і справджується аксіома індуктивності:

$$\exists o \in X \setminus F[X] \quad \forall A \subseteq X \left((o \in A \wedge F[A] \subseteq A) \rightarrow A = X \right).$$

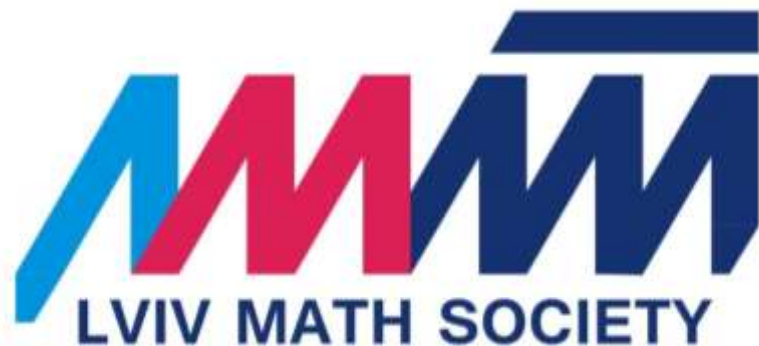
Теорема (фольклор): Унар (X, F) ізоморфний унару цілих чисел (\mathbf{Z}, S)

з операцією $S: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$, $S: z \mapsto z + 1$, тоді і лише тоді, коли

- функція $F: X \rightarrow X$ – бієктивна;
- $\exists A \subseteq X (F[A] \subset A \neq F[A])$;
- $\forall A \subseteq X (F[A] = A \neq \emptyset \rightarrow A = X)$.

Зауваження: Унар (\mathbf{N}, S) є жорсткою математичною структурою, а унар (\mathbf{Z}, S) – ні.

Далі буде!



Лекції відбуваються під егідою
Львівського Математичного Товариства.

Будемо вдячні за підтримку.



ГО ЛЬВІВСЬКЕ
МАТЕМАТИЧНЕ
ТОВАРИСТВО

Членські внески



- 1 Завантажте додаток Приват24 на pb.ua/apps
- 2 Увійдіть у додаток та натисніть 
- 3 Відскануйте QR-код
- 4 Оберіть картку для оплати