LVIV MATH SOCIETY

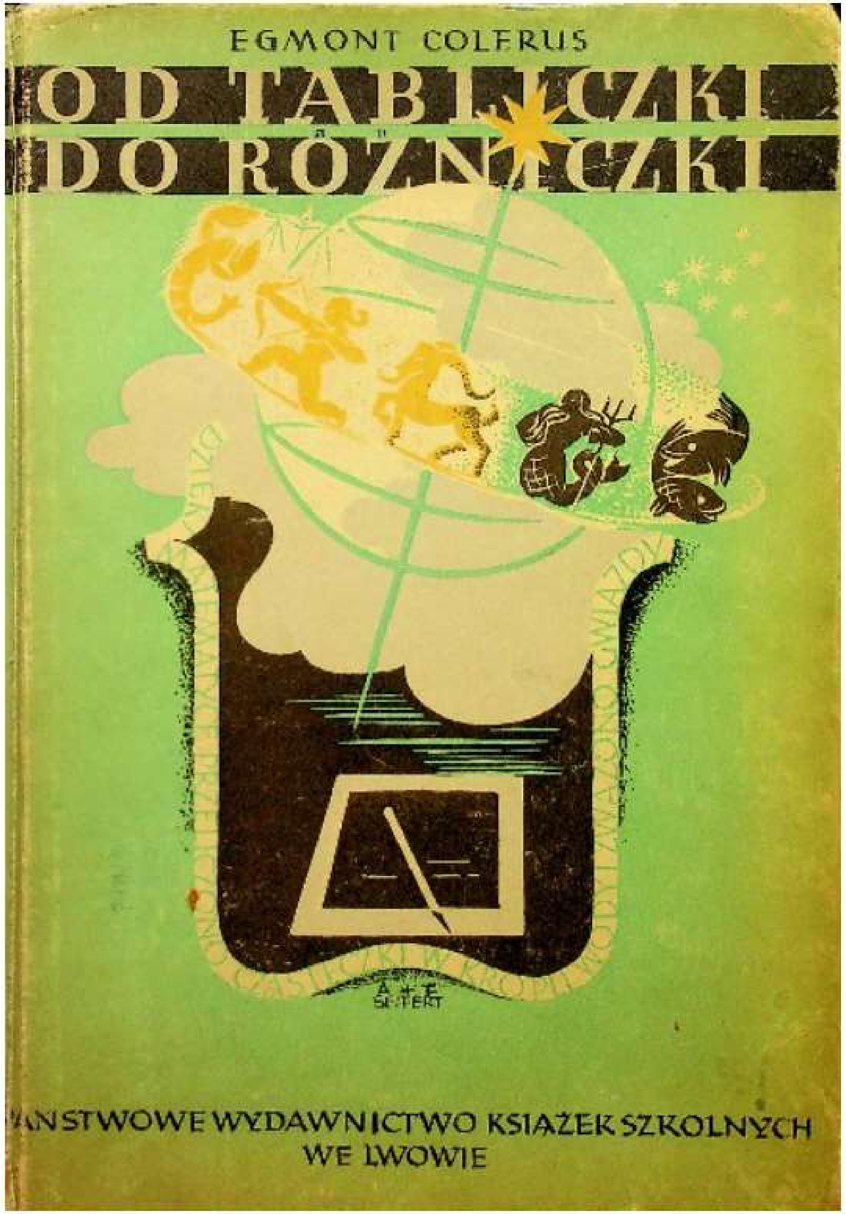
Основи Геометрії

чим є евклідова геометрія і яке її місце
в сучасній теоретико-множинній парадигмі
математичних структур Бурбакі?

- *Matematyka jest najpiękniejszym i najpotężniejszym tworem ducha ludzkiego.*
- *Matematyka jest tak stara, jak stary jest człowiek.*
- *Mimo swojego podstawowego znaczenia dla dzisiejszej kultury, matematyka jest nauką, której istota i rola dla niewielu tylko jest zrozumiała.*
- *Tylko państwa, które pielęgnują matematykę, mogą być silne i potężne.*

cytaty z przedmowy Stefana Banacha do książki Egmonta Colerusa «*Od tabliczki do różniczki*»

Стефан Банах
(30.03.1892 – 31.08.1945)

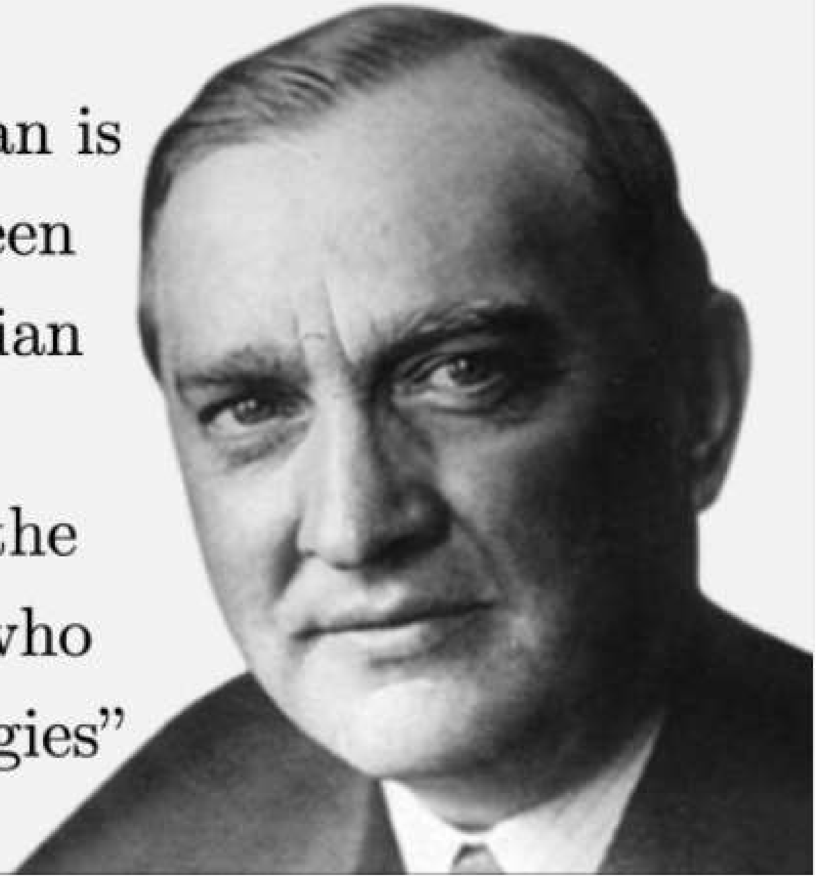


- **Rok wydania:** 1938
- **Rodzaj okładki:** Twarda
- **Autor:** Egmont Colerus
- **Stan:** Używana
- **ISBN:** -
- **Wymiar:** 13.5cm x 25cm
- **Nr wydania:** -
- **Seria:** -
- **Ilość stron:** 360
- **Waga:** 1.6 kg
- **Indeks:** -
- **TIN:** T04021382

Реклама книжки «Od tabliczki do różniczki» на Allegro

Matematyka dla wszystkich, przekład autoryzowany Antoniego Nyklińskiego, z przedmową dr-a Stefana Banacha, prof. Uniw Jana Kazimierza. Stefan Banach (ur. 30 marca 1892 w Krakowie, zm. 31 sierpnia 1945 we Lwowie) – polski matematyk, jeden z przedstawicieli lwowskiej szkoły matematycznej. W 1932 ukazało się w druku słynne dzieło Banacha Théorie des opérations linéaires jako pierwszy tom nowego wydawnictwa Monografie Matematyczne, którego był jednym z założycieli. Dzieło to przyczyniło się w dużym stopniu do spopularyzowania osiągnięć Banacha wśród ogółu matematyków i do rozwoju analizy funkcjonalnej. O zainteresowaniu świata matematycznego osobą Banacha świadczy między innymi fakt powierzenia mu jednego z odczytów plenarnych na Międzynarodowym Kongresie Matematycznym w Oslo w 1936. O uznaniu zasług Banacha w kraju świadczy też i to, że był kilkukrotnie laureatem nagród naukowych, a w 1939 zostaje wybrany na prezesa Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Był członkiem zwyczajnym Kasyna i Koła Literacko-Artystycznego we Lwowie. Był autorem ponad 60 prac naukowych i twórcą wielu twierdzeń o fundamentalnym znaczeniu dla wielu działów matematyki. Styl pracy Banacha, jego niezwykła intuicja naukowa, bezpośredniość i otwartość pozwoliły mu (wraz ze Steinhausem) na stworzenie Lwowskiej Szkoły Matematycznej. W 1924 został członkiem-korespondentem Polskiej Akademii Umiejętności, od 1931 członkiem zwyczajnym Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, członkiem przybranym (1923) i członkiem czynnym (1927) Towarzystwa Naukowego we Lwowie, członkiem założycielem (1919) Polskiego Towarzystwa Matematycznego i jego wiceprezesem (1932–1936) oraz prezesem (1939–1945). W 1930 otrzymał nagrodę naukową miasta Lwowa. W latach 1936–1939 był wiceprzewodniczącym Komitetu Matematycznego Rady Nauk Ścisłych i Stosowanych. W 1939 PAU przyznała mu wielką nagrodę. Spis treści: 1. Przedmowa. 2. Wstęp. 3. Prawdziwa Kabała 4. Układ dziesiątkowy 5. Symbole i rozkazy 6. Kombinatoyka 7. Permutacja ...;

“A mathematician is a person who can find analogies between theorems; a better mathematician is one who can see analogies between proofs and the best mathematician can notice analogies between theories. One can imagine that the ultimate mathematician is one who can see analogies between analogies”



Stefan Banach
(30.03.1892 – 31.08.1945)

Математичні структури

La mathématique est la science des structures mathématiques
Nicolas Bourbaki

Означення: Математичною структурою називається впорядкована пара (X, S) двох множин, що задовольняє певний список *A* аксіом, характерних для цієї математичної структури. Аксіомою називається формула $\varphi(X, S, C_1, \dots, C_n)$ з вільними змінними $X, S, C_1, \dots, C_n$, серед яких $C_1, \dots, C_n$ є певними фіксованими множинами (параметрами).

Наприклад, для векторних просторів над полем F це поле виступає як параметр в аксіомах векторного поля, а для метричних просторів таким параметром є множина дійсних чисел **R**.

Для математичної структури (X, S), множина X називається її носієм (underlying set), а S – структурою математичної структури.

Залежно від вигляду аксіом зі списку *A,* математичні структури поділяються на елементарні (для них аксіоми містять лише квантори виду $\forall x \in X$ або $\exists x \in X$) та неелементарні (різного порядку складності, наприклад для другого порядку дозволено мати квантори $\forall A \subseteq X^n$ чи $\exists A \subseteq X^n$, які перебирають відношення на X).

Також розрізняють базові структури (порядкові, алгебраїчні, метричні, топологічні) та комбіновані структури (тобто комбінації базових структур).

Практично всі важливі математичні структури присутні на дійсній прямій, яка є одночасно:

орієнтованим графом, частково впорядкованою множиною, лінійно впорядкованою множиною, магмою, напівгрупою, групою, напівкільцем, кільцем, полем, впорядкованою групою, впорядкованим полем, метричним простором, топологічним простором, рівномірним простором, грубим простором, лінійним простором, білінійним простором, простором зі скалярним добутком, нормованим простором, банаховим простором, банаховою алгеброю, передгільбертовим простором, гільбертовим простором і т.д.

Питання: *Яка математична структура описує геометрію Евкліда?*

Чи існує виклад евклідової геометрії як однієї з математичних структур?

Дивно, але Бурбакі у своїх «Елементах» не дали відповіді на це питання…

Математична структура унару

Означення: Унаром називається математична структура (X, U), що складається з множини X та унарної операції $U: X \to X$.
Тобто унаром є орграф (X, U), що задовольняє аксіому

$$(\forall x \in X\ \exists y \in X\ \ xUy) \wedge \Big(\forall x, y, z\ \big((xUy \wedge xUz) \to y = z\big)\Big).$$

Важливим прикладом унару є множина натуральних чисел з унарною операцією наступника $+1: \mathbf{N} \to \mathbf{N}, +1: n \mapsto n + 1 := n \cup \{n\}$.

Означення: Унари (X, U) та (Y, V) ізоморфні, якщо існує така бієкція $F: X \to Y$, що $\forall x \in X\ \ V\big(F(x)\big) = F(U(x))$.

Теорема (R.Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen?; 1888):
Унар (X, U) ізоморфний унару натуральних чисел $(\mathbf{N}, +1)$ тоді і лише тоді, коли функція $U: X \to X$ ін'єктивна і справджується аксіома індукції:

$$\exists o \in X \setminus U[X]\ \ \forall A \subseteq X\ \big((o \in A \wedge U[A] \subseteq A) \to A = X\big).$$

Зауваження: Унар $(\mathbf{N}, +1)$ є жорсткою математичною структурою.

Алгебраїчні математичні структури: магми

Def. *Магмою* називається математична структура $(X,*)$, що складається з множини X та бінарної операції $*\colon X \times X \to X$, $*\colon (x,y) \to x * y$.

Def. Магма $(X,*)$ називається

- комутативною, якщо $x * y = y * z$ для довільних $x, y \in X$;
- асоціативною, якщо $x * (y * z) = (x * y) * z$ для $\forall x, y, z \in X$.

Асоціативні магми називають теж напівгрупами.

Приклади: Множини $\mathbf{N}, \omega, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ є комутативними напівгрупами відносно бінарних операцій додавання чи множення.

Характеризація напівгрупи (N,+)

Означення: Магми $(X,*), (Y,\cdot)$ є ізоморфними, якщо існує така бієктивна функція $F: X \to Y$, що $F(x * y) = F(x) \cdot F(y)$ для довільних $x, y \in X$.

Теорема: Напівгрупа $(X,*)$ ізоморфна напівгрупі $(\mathbf{N}, +)$ тоді і лише тоді, коли

$$\exists g \in X \left(g * g \neq g \wedge (\forall x, y \in X\ (x \neq y \to x * g \neq y * g)) \wedge (\forall A \subseteq X\ (g \in A \wedge\ [A * g \subseteq A]) \to A = X)\right).$$

Зауваження: Ця умова виражаються формулою 2-го порядку, нескінченність напівгрупи $(X,*)$ випливає з алгебраїчної умови.

Задача: Придумати характеризацію напівгрупи $(\mathbf{N},\cdot)$.

Зауваження: Як зауважив Павло Дзіковський, скінченність множини X виражається формулою 2-го порядку (яка коротша за формулу скінченності за Дедекіндом):

$$\forall E \subseteq X^2 \left(\forall x \forall y \forall z\ ((xEy \wedge yEz) \to xEz)\right) \to (X \neq \emptyset \to \exists x \in X\ \forall y\ (xEy \to yEx)).$$

Алгебраїчні структури: моноїди і групи

Означення: Напівгрупа $(X,*)$ називається моноїдом, якщо вона містить нейтральний елемент, тобто такий елемент $e \in X$, що $\forall x \in X\ [x * e = x = e * x]$.

Якщо нейтральний елемент e існує, то він єдиний.
Дійсно, якщо o $-$ інший нейтральний елемент, то $e = e * o = o$.

Приклади: Множина ω є моноїдом відносно операції додавання чи множення. Множина $\mathbf{N}$ є моноїдом відносно операції множення, але не відносно операції додавання.

Def: Моноїд $(X,*)$ називається групою, якщо $\forall x \in X\ \exists y \in X\ [x * y = e = y * x]$, де e $-$ нейтральний елемент моноїда $(X,*)$.

Приклади: Множини $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ є групами відносно операції додавання та моноїдами (але не групами) відносно операції множення.

Характеризація групи $(\mathbf{Z},+)$

Теорема: Магма $(\boldsymbol{X},*)$ ізоморфна групі цілих чисел $(\mathbf{Z},+)$ тоді і лише тоді, коли $(\boldsymbol{X},*)$ є групою, яка задовольняє наступну аксіому 2-го порядку:

$$\exists g \in X \left(\left(\exists A \subseteq X\ (g \in A \wedge A * g \subseteq A \neq X) \right) \wedge \forall B \subseteq X\ \left((g \in B \wedge B - B \subseteq B) \rightarrow B = X \right) \right).$$

Вправа: Придумати характеризацію груп $(\mathbf{Q},+)$ та $(\mathbf{R},+)$, бажано на мові логіки 2-го порядку.

Зауваження: Магми $(\mathbf{N},+)$ та $(\omega,+)$ є жорсткими математичними структурами, а $(\mathbf{Z},+), (\mathbf{Q},+), (\mathbf{R},+)$ – ні. Це випливає з

Твердження: Група $(X,*)$ є жорсткою тоді і лише тоді, коли $|X| \leq 2$.

Алгебраїчні структури: напівкільця

Означення: *Напівкільцем* називається математична структура $(X,(+,\cdot))$ для якої

- пара $(X,+)$ є комутативним моноїдом з нейтральним елементом 0;
- пара $(X,\cdot)$ є моноїдом з нейтральним елементом $1 \neq 0$;
- $\forall x \in X\ [x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x]$;
- справджується закон дистрибутивності множення відносно додавання

$$\forall x,y,z \in X \quad x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z \ \wedge \ (x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Означення: Напівкільце $(X,(+,\cdot))$ називається комутативним,

якщо напівгрупа $(X,\cdot)$ комутативна.

Приклад: $(\boldsymbol{\omega},(+,\cdot))$, $(\mathbf{Z},(+,\cdot))$, $(\mathbf{Q},(+,\cdot))$ і $(\mathbf{R},(+,\cdot))$ є комутативними напівкільцями.

Характеризація напівкільця $\boldsymbol{\omega}$

Означення: Два напівкільця $(X,(+,\cdot))$ та $(Y,(+,\cdot))$ називають ізоморфними, якщо існує бієкція $F: X \to Y$ така, що $F(x+y) = F(x) + F(y)$ і $F(x \cdot y) = F(x) \cdot F(y)$ для $\forall x, y \in X$.

Теорема: Напівкільце $(X,(+,\cdot))$ ізоморфне напівкільцю $(\omega,(+,\cdot))$ тоді і лише тоді, коли

- $\forall x, y \in X\ (x \neq y \to x+1 \neq y+1)$;
- $\forall A \subseteq X\ \big((0 \in A \wedge 1 \in A\ \wedge\ \forall x \in A\ [x+1 \in A]) \to A = X\big)$.

Наслідок: Напівкільце $(X,(+,\cdot))$ ізоморфне напівкільцю $(\omega,(+,\cdot))$ тоді і лише тоді, коли унар $(X,+1)$ з операцією $+1: X \to X, +1: x \mapsto x+1$, ізоморфний унару $(\omega,+1)$.

Алгебраїчні структури: кільця і поля

Означення: Напівкільце $(X,(+,\cdot))$ називається

- *кільцем*, якщо моноїд $(X,+)$ є групою;
- *тілом*, якщо $(X,(+,\cdot))$ є кільцем і $\forall x \in X \setminus \{0\}\ \exists y \in X\ [x \cdot y = 1 = y \cdot x]$;
- *полем*, якщо $(X,(+,\cdot))$ є комутативним тілом.

Приклад: $(\mathbf{Z},(+,\cdot))$ є комутативним кільцем, а $(\mathbf{Q},(+,\cdot))$ і $(\mathbf{R},(+,\cdot))$ є полями.

Задача: Придумати приклад тіла, яке не є полем (***підказка:*** *тіло кватерніонів*).

Характеризація кілець **Z** та **Q**.

Теорема: Напівкільце $(X,(+,\cdot))$ ізоморфне кільцю цілих чисел **Z** тоді і лише тоді, коли $(X,(+,\cdot))$ є кільцем, що задовольняє дві аксіоми:

- $\exists A \subseteq X\ (1 \in A\ \wedge\ A+1 \subset A \neq X)$;
- $\forall A \subseteq X\ \big((1 \in A\ \wedge\ A+1 = A) \to A = X\big)$.

Теорема: Напівкільце $(X,(+,\cdot))$ ізоморфне полю раціональних чисел **Q** тоді і лише тоді, коли X є полем, що задовольняє дві аксіоми 2-го порядку:

- $\exists A \subseteq X\ (1 \in A\ \wedge\ A+1 \subset A \neq X)$;
- $\forall A \subseteq X\ \big((1 \in A\ \wedge\ \forall x \in A\ \forall y \in X\ [(x+y=0\ \vee\ x \cdot y = 1) \to y \in A]) \to A = X\big)$.

Зауваження: Для характеризації поля дійсних чисел **R** треба залучати порядкові структури.

Порядково-алгебраїчні математичні структури:

Def: Впорядкованою групою називається математична структура $\big(X,(+,<)\big)$, яка задовольняє наступні аксіоми:

- $(X,+)$ є комутативною групою;
- $(X,<)$ є лінійно впорядкованою множиною,
- $\forall x,y,z \in X\ \big((x<y)\to(x+z<y+z)\big)$;

Приклад: Множини $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ є впорядкованими групами відносно операції додавання та природного лінійного порядку (строгого або нестрогого).

Вправа: Довести, що кожна нетривіальна впорядкована група є нескінченною.

Характеризація впорядкованої групи **Z**.

Означення: Впорядковані групи $(X,(+,<))$ та $(Y,(+,<))$ називаються ізоморфними, якщо існує бієкція $F: X \to Y$ така, що $F(x+y) = F(x) + F(y)$ і $x < y \leftrightarrow F(x) < F(y)$ для довільних $x, y \in X$.

Теорема: Впорядкована група $(X,(+,<))$ ізоморфна впорядкованій групі цілих чисел тоді і лише тоді, коли

$$\exists g \in X \left((0 < g \ \wedge \ \forall A \subseteq X \, (g \in A \ \wedge \ A - A \subseteq A)) \to A = X \right).$$

Задача: Придумати характеризацію впорядкованої групи раціональних чисел, бажано в логіці 2-го порядку.

Архімедові впорядковані групи

Означення: Впорядкована група $(X, (+, <))$ називається архімедовою, якщо вона задовольняє аксіому Архімеда:

- $\forall a, b \in X\ [(0 < a \wedge 0 < b) \to \exists n \in \mathbf{N}\ (b < na)]$.

При цьому елемент $na \in X$ означається рекурсивною формулою:
$1a = a$ і $(n+1)a = na + a$ для кожного $n \in \mathbf{N}$.

Приклад: Множини $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ є архімедовими впорядкованими групами відносно операції додавання та природного лінійного порядку.

Приклад: Група $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, наділена лексикографічним порядком:

$$(x, y) < (u, v) \Leftrightarrow (x < y \vee (x = y\ \wedge\ u < v))$$

є неархімедовою впорядкованою групою.

Неперервні порядки на групах є архімедовими

Нагадаємо, що порядок $<$ на множині X є неперервним, якщо
для довільних непорожних підмножин $A, B \subseteq X$ справджується імплікація:

$$(\forall a \in A\ \forall b \in B\ a < b) \to (\exists x \in X\ \forall a \in A\ \forall b \in B\ \ a \le x \le b).$$

Теорема: Впорядкована група $\big(X, (+, <)\big)$ з неперервним порядком є архімедовою.

Доведення: Припускаючи, що впорядкована група $\big(X, (+, <)\big)$ неархімедова, знайдемо такі два додатні елементи $c, C \in X$, що $nc < C$ для усіх $n \in \mathbf{N}$. Розглянемо підмножину $A = \{x \in X\colon \exists x < nc\}$ та її доповнення $B = X \setminus A$. За неперервністю порядку, існує такий елемент $x \in X = A \cup B$, що $a \le x \le b$ для довільних $a \in A$ та $b \in B$.
Якщо $x \in A$, тоді $x + c \in A$ і $x + c \nleq x$, що суперечить вибору x.
Якщо $x \in B$ тоді $x - c \in B$ і $x \nleq x - c$, що теж суперечить вибору x. □

Характеризація впорядкованої групи $\mathbf{R}$.

Теорема: Впорядкована група $(X, (+, <))$ ізоморфна впорядкованій групі дійсних чисел $\mathbf{R}$ тоді і лише тоді, коли її порядок непорожній, строгий, щільний і неперервний.

Зауваження: Впорядкована група $\mathbf{Z}$ жорстка, а впорядковані групи $\mathbf{Q}$ та $\mathbf{R}$ – ні, але вже впорядковані поля $\mathbf{Q}$ та $\mathbf{R}$ – жорсткі.
Поле комплексних чисел $\mathbf{C}$ не є жорстким.

Характеризація впорядкованих полів **Q** та **R**

Означення: Впорядкованим полем називається математична структура $(X, (+,\cdot,<))$, для якої $(X, (+,\cdot))$ – поле, $(X, (+,<))$ – впорядкована група і

$$\forall x, y \in X \ \ (0 < x \land 0 < y) \to (0 < x \cdot y).$$

Зауваження: Алгебраїчна структура поля дійсних чисел визначає його порядок, оскільки $0 \leq x \leftrightarrow \exists y \, [x = y \cdot y]$.
Подібний факт вірний теж для поля раціональних чисел (але з іншої причини).

Теорема: Впорядковане поле $(X, (+,\cdot,<))$ ізоморфне впорядкованому полю раціональних чисел $(\mathbf{Q}, (+,\cdot,<))$ тоді і лише тоді, коли

$$\forall A \subseteq X \, ((1 \in A \ \land \ \forall x \in A \, \forall y \in A \setminus \{0\} \ \{x - y, x/y\} \subseteq A) \to A = X).$$

Теорема (Hungtinton, 1903): Впорядковане поле $(X, (+,\cdot,<))$ ізоморфне впорядкованому полю дійсних чисел $(\mathbf{R}, (+,\cdot,<))$ тоді і лише тоді, коли порядок $<$ є непорожнім, строгим, щільним і неперервним.

Характеризація поля $\mathbf{C}$

Означення: Поле $(F,(+,\cdot))$ називається алгебраїчно замкненим, якщо

$$\forall n \in \mathbf{N}\ \forall a_0, a_1, \dots, a_n \in F\ (a_n \neq 0 \to \exists x \in F\ \ a_0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n = 0).$$

Основна Теорема Алгебри (D’Alambert-…-Gauss, 1746-…-1849):

Поле комплексних чисел алгебраїчно замкнене.

Jean-Robert Argand (1768 -- 1822)

Некоректні доведення:

D’Alambert (1746), Euler (1749), Lagrange (1772), Laplace (1795), Gauss (1799).

Коректні доведення: Argand (1814), Gauss (1816), Cauchy (1821), Gauss (1849).

Теорема: Поле $(X,(+,\cdot))$ ізоморфне полю комплексних чисел тоді і лише тоді, коли X алгебраїчно замкнене, має потужність континуума і характеристику нуль, тобто $\exists A \subset X\ [0 \notin A\ \wedge\ 1 \in A\ \wedge\ A + 1 \subseteq A]$.

Алгебраїчні та трансцендентні числа

Означення: Комплексне число z називається

- *алгебраїчним*, якщо
  $\exists n \in \mathbf{N}\ \exists a_0, a_1, \dots, a_n \in Z\ [a_n \neq 0\ \wedge\ a_0 + a_1 z^1 + \cdots + a_n z^n = 0]$;
- трансцендентним, якщо воно не є алгебраїчним.

Теорема: Множина $\overline{\mathbf{Q}}$ алгебраїчних комплексних чисел є зліченним алгебраїчно замкненим підполем поля $\mathbf{C}$.

Приклади конкретних трансцендентних чисел:

- e (Hermite, 1873);
- π (Lindenmann, 1882);
- a^b, де $a \in \overline{\mathbf{Q}} \setminus \{0,1\}$ та $b \in \overline{\mathbf{Q}} \setminus \mathbf{Q}$ (Гельфонд, Schneider, 1934);
- $e^\pi = \left(e^{\pi i}\right)^{-i} = (-1)^{-i}$, $i^i = \left(e^{i\pi/2}\right)^i = e^{-\pi/2}$.

Реально замкнені поля

Означення: Поле $(F, (+,\cdot))$ називається реально замкненим, якщо

- $\forall a \in F \; \exists x \in F \; \big((x^2 = a) \vee (x^2 = -a)\big)$;
- $\forall n \in \mathbf{N} \; \forall a_0, \dots, a_{2n+1} \in F \; (a_{2n+1} \neq 0 \to \exists x \in F \; [a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_{2n+1} x^{2n+1} = 0])$.

Теорема: Поле дійсних чисел реально замкнене.

Доведення: Застосувати неперервність лінійного порядку на $\mathbf{R}$.

Приклад: Множина $\overline{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}$ дійсних алгебраїчних чисел є реально замкненим зліченним підполем поля $\mathbf{R}$.

Теорема (Тарський, 1940): Елементарна теорія реально замкнених впорядкованих полів повна.

Теорема (Гедель, 1931): Будь-яка рекурсивна система аксіом 1-го порядку, в якій виражається арифметика натуральних числа неповна.

Далі буде!

Лекції відбуваються під егідою
Львівського Математичного Товариства.

Будемо вдячні за підтримку.