Тарас Банах: Основи геометрії


Лекція 5: Елементи лінійної алгебри

6 квітня 2023

# Основи Геометрії

## чим є евклідова геометрія і яке її місце в сучасній теоретико-множинній парадигмі математичних структур Бурбакі?

# Математичні структури

*La mathématique est la science des structures mathématiques*
Nicolas Bourbaki

**Означення:** Математичною структурою називається впорядкована пара $(X, S)$ двох множин, що задовольняє певний список *A* аксіом, характерних для цієї математичної структури. Аксіомою називається формула $\varphi(X, S, C_1, \dots, C_n)$ з вільними змінними $X, S, C_1, \dots, C_n$, серед яких $C_1, \dots, C_n$ є певними фіксованими множинами (параметрами).

Наприклад, для векторних просторів над полем F це поле виступає як параметр в аксіомах векторного поля, а для метричних просторів таким параметром є множина дійсних чисел **R**.

Для математичної структури $(X, S)$, множина $X$ називається її носієм (underlying set), а $S$ – структурою математичної структури.

Залежно від вигляду аксіом зі списку *A*, математичні структури поділяються на елементарні (для них аксіоми містять лише квантори виду $\forall x \in X$ або $\exists x \in X$) та неелементарні (різного порядку складності, наприклад для другого порядку дозволено мати квантори $\forall A \subseteq X^n$ чи $\exists A \subseteq X^n$, які перебирають відношення на $X$).

Також розрізняють базові структури (порядкові, алгебраїчні, метричні, топологічні) та комбіновані структури (тобто комбінації базових структур).

# Практично всі важливі математичні структури присутні на дійсній прямій, яка є одночасно:

орієнтованим графом, частково впорядкованою множиною, лінійно впорядкованою множиною, магмою, напівгрупою, групою, кільцем, полем, впорядкованою групою, впорядкованим полем, модулем, лінійним простором, афінним простором, білінійним простором, псевдоевклідовим білінійним простором, евклідовим білінійним простором, афінним білінійним простором, псевдоевклідовим афінним простором, евклідовим афінним простором, метричним простором, топологічним простором, рівномірним простором, грубим простором, нормованим простором, банаховим простором, банаховою алгеброю, передгільбертовим простором, гільбертовим простором і т.д.

**Питання:** *Яка математична структура описує геометрію Евкліда?*
*Чи існує виклад евклідової геометрії як однієї з математичних структур?*
Дивно, але Бурбакі у своїх «Елементах» не дали відповіді на це питання… Чому?
Можливо, тому що на той часі вже існували аксіоматизації Вайля і Біркхофа…

The question for the ultimate foundations and
the ultimate meaning of mathematics remains open;
we do not know in which direction it will find its final solution nor
even whether a final objective answer can be expected at all.
"Mathematizing" may well be a creative activity of man,
like language or music, of primary originality, whose
historical decisions defy complete objective rationalization.

*H.Weyl,* 1943,

In these days the angel of topology
and the devil of abstract algebra fight for
the soul of each individual mathematical domain.

*H.Weyl,* 1939

**Hermann Weyl**
(1885 – 1955)

# Кільця і поля

Нагадаємо, що кільцем називається математична структура $\big(X, (+,\cdot)\big)$, у якій

- $(X, +)$ є комутативною групою з нейтральним елементом $0$;
- $(X,\cdot)$ є моноїдом з нейтральним елементом $1 \neq 0$;
- $\forall x, y, z \in X \;\; x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot y \;\wedge\; (x + y) \cdot z = x \cdot y + x \cdot z$.

Кільце $\big(X, (+,\cdot)\big)$ називається

- комутативним, якщо $\forall x, y \in X \;\; [x \cdot y = y \cdot x]$;
- полем, якщо воно комутативне і $\forall x \in X \setminus \{0\} \; \exists y \in X \; [x \cdot y = 1 = y \cdot x]$.

**Приклад:** Множина $\mathbf{Z}$ цілих чисел з операціями додавання і множення є комутативним кільцем, а множини $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ – полями.

Усі кільця, що розглядатимуться далі вважатимуться комутативними.

# Модулі та лінійні простори

**Означення:** Модулем над кільцем $\boldsymbol{K} = \big(K, (+,\cdot)\big)$, або коротше $\boldsymbol{K}$-модулем, називається математична структура $\big(V, (+,\cdot)\big)$, структура якої складається з двох операцій $+: V \times V \to V$ та $\cdot: K \times V \to V$, що задовольняють шість аксіом:

- $\forall x, y, z \in V \quad (x + y) + z = x + (y + z)$
- $\forall x, y \in V \quad x + y = y + x$
- $\forall a, b \in K\ \forall x \in V \quad a \cdot (b \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x$
- $\forall a, b \in K\ \forall x \in V \quad (a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$
- $\forall a \in K\ \forall x, y \in V \quad a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$
- $\forall x \in X \quad 1 \cdot x = x$.

Якщо кільце $\boldsymbol{K}$ є полем, то $\boldsymbol{K}$-модуль $\big(V, (+,\cdot)\big)$ називається лінійним простором над полем $\boldsymbol{K}$, або коротше, $\boldsymbol{K}$-лінійним простором; $\mathbf{R}$-лінійні простори називають векторними просторами.

**Приклад:** Будь-яка комутативна група має структуру модуля над кільцем $\mathbf{Z}$.

**Приклад:** Для кільця $\boldsymbol{K}$ та множини $A$ простір $K^A$ функцій з $A$ в $K$ має структуру $\boldsymbol{K}$-модуля.

# Ізоморфізми модулів над кільцями

**Означення:** Модулі $(X,(+,\cdot))$ та $(Y,(+,\cdot))$ над кільцем $\boldsymbol{K}=(K,(+,\cdot))$ називаються ізоморфними, якщо існує така бієкція $F\colon X\to Y$, що

$$\forall a\in K\ \forall x,y\in X\ \ [F(x+y)=F(x)+F(y)\wedge\ F(a\cdot x)=a\cdot F(x)].$$

У цьому випадку бієкція $F$ називається ізоморфізмом $\boldsymbol{K}$-модулів. Якщо $(X,(+,\cdot))=(Y,(+,\cdot))$, тоді ізоморфізм $F$ називається автоморфізмом.

**Приклад:** Бієкція $F\colon\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$, $F\colon z\mapsto -z$, є автоморфізмом $\mathbf{Z}$-модуля $\mathbf{Z}$, але не автоморфізмом кільця $\mathbf{Z}$.

# Характеризація $\mathbf{Z}$-модулів $\mathbf{Z}$,$\mathbf{Q}$,$\mathbf{R}$

**Теорема:** $\mathbf{Z}$-модуль $\left(X,(+,\cdot)\right)$ ізоморфний $\mathbf{Z}$-модулю $\left(\mathbf{Z},(+,\cdot)\right)$ тоді і лише тоді, коли

$$\exists u \in X\ \left((\forall x \in X\ \exists n \in \mathbf{Z}\ \ x = n \cdot u) \wedge (\forall n \in \mathbf{Z}\ \ [n \neq 0 \to n \cdot u \neq 0 \cdot u])\right).$$

**Теорема:** $\mathbf{Z}$-модуль $\left(X,(+,\cdot)\right)$ ізоморфний $\mathbf{Z}$-модулю $\left(\mathbf{Q},(+,\cdot)\right)$ тоді і лише тоді, коли

$$\exists u \in X\ \left((\forall x \in X\ \exists n,m \in \mathbf{Z}\ [m \neq 0 \wedge m \cdot\ x = n \cdot u]) \wedge (\forall n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}\ [n \cdot u \neq 0 \cdot u \wedge \exists x \in X\ n \cdot x = u])\right).$$

**Теорема:** $\mathbf{Z}$-модуль $\left(X,(+,\cdot)\right)$ ізоморфний $\mathbf{Z}$-модулю $\left(\mathbf{R},(+,\cdot)\right)$ тоді і лише тоді, коли

- $\forall n \in \mathbf{Z}\ \forall x \in X\ [n \cdot x = 0 \cdot x \to (n = 0\ \vee\ x + x = x)]$
- $\forall n \in \mathbf{Z}\ \forall x \in X\ [n \neq 0 \to \exists y \in X\ (n \cdot y = x)]$
- існує бієктивна функція $F\colon X \to \mathbf{R}$.

# Характеризація векторного простору $\mathbf{R}^n$

**Означення:** Для $K$-модуля $\big(X, (+,\cdot)\big)$ через $\dim_K(X)$ позначаємо найменшу потужність підмножини $B \subseteq X$, яка породжує цей модуль в тому сенсі, що $\forall x \in X\ \exists n \in \mathbf{N}\ \exists a \in K^n\ \exists b \in B^n\ \ x = \sum_{i \in n} a_i \cdot b_i$.

Якщо кільце $K$ є полем, то $\dim_K(X)$ називають $K$-*виміром* лінійного простору $\big(X, (+,\cdot)\big)$.

**Теорема:** Два $K$-модулі $\big(X, (+,\cdot)\big)$ і $\big(Y, (+,\cdot)\big)$ над полем $K$ ізоморфні тоді і лише тоді, коли $\dim_K(X) = \dim_K(Y)$.

**Наслідок:** $K$-модуль $\big(X, (+,\cdot)\big)$ над полем $K$ ізоморфний модулю $K^n$ для $n \in \omega$ тоді і лише тоді, коли $\dim_K(X) = n$.

**Наслідок:** Векторний простір $\big(X, (+,\cdot)\big)$ ізоморфний векторному простору $\mathbf{R}^n$ для $n \in \omega$ тоді і лише тоді, коли $\dim_{\mathbf{R}}(X) = n$.

# Афінні простори

Інтуїтивно, афінні простори це лінійні простори, яких «забули» де початок координат. Формальне означення таке.

**Означення:** $K$-**афінним простором** над кільцем $K$ називається математична структура $\left(X, (V, +, \cdot, \overrightarrow{**})\right)$ з непорожнім носієм $X$, у якому $(V, +, \cdot)$ є $K$-модулем, а $\overrightarrow{**}: X \times X \to V$, $\overrightarrow{**}: (x, y) \mapsto \overrightarrow{xy}$, є функцією, що задовольняє дві аксіоми:

- $\forall x \in X \ \forall v \in V \ \exists! \, y \in Y \quad \overrightarrow{xy} = v;$
- $\forall x, y, z \in X \quad \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$.

**Приклад:** Для довільного кільця $K$ та довільної множини $n$, пара $\left(K^n, (K^n, +, \cdot, -)\right)$ з природними операціями додавання, множення на елемент кільця і віднімання є афінним простором над кільцем $K$.

# Ізоморфізми афінних просторів

**Означення:** Два $K$-афінні простори $\left(X, (V_X, +, \cdot, \overrightarrow{**})\right)$ і $\left(Y, (V_Y, +, \cdot, \overrightarrow{**})\right)$ над кільцем $K$ називаються *ізоморфними*, якщо існує бієкція $F: X \to Y$, для якої існує такий ізоморфізм $K$-модулів $\vec{F}: V_X \to V_Y$, що $\vec{F}(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{F(x)F(y)}$ для довільних точок $x, y \in X$.

**Теорема:** Два $K$-афінні простори $\left(X, (V_X, +, \cdot, \overrightarrow{**})\right)$ і $\left(Y, (V_Y, +, \cdot, \overrightarrow{**})\right)$ над полем $K$ є ізоморфними тоді і лише тоді, коли $\dim_K(V_X) = \dim_K(V_Y)$.

**Наслідок:** Афінний простір $\left(X, (V_X, +, \cdot, \overrightarrow{**})\right)$ над полем $K$ ізоморфний афінному простору $\mathbf{R}^n$ виміру $n \in \omega$ тоді і лише тоді, коли $\dim_K(V_X) = n$.

# Білінійні форми і білінійні простори

**Означення:** Білінійною формою на $K$-модулі $\big(X,(+,\cdot)\big)$ називається довільна функція $\langle|\rangle: X\times X\to K$, $\langle|\rangle:(x,y)\mapsto\langle x|y\rangle$, що задовольняє аксіоми:

- $\forall x,y,z\in X\ \ [\langle x+y|z\rangle=\langle x|z\rangle+\langle y|z\rangle\ \wedge\ \langle x|y+z\rangle=\langle x|y\rangle+\langle x|z\rangle]$;
- $\forall a\in K\ \forall x,y\in X\ \ [\langle a\cdot x|y\rangle=a\cdot\langle x|y\rangle\ \wedge\ \langle x|a\cdot y\rangle=a\cdot\langle x|y\rangle]$.

**Приклад:** Для (комутативного) кільця $K$ і довільної матриці $c: n\times n\to K$ функція

$$\langle|\rangle: K^n\times K^n\to K,\ \langle|\rangle:(x,y)\mapsto\langle x|y\rangle:=\sum_{i,j\in n}c_{i,j}\cdot x_i\cdot y_j\,,$$

є білінійною формою. Кожна білінійна форма на $K$-модулі $K^n$ має саме такий вид.

**Означення:** Білінійним простором над кільцем $K$, або точніше, $K$-білінійним простором називається математична структура $\big(X,(+,\cdot,\langle|\rangle)\big)$, у якій $\big(X,(+,\cdot)\big)$ є $K$-модулем і $\langle|\rangle: X\times X\to K$ є білінійною формою на $\big(X,(+,\cdot)\big)$.

# Властивості білінійних форм

**Означення:** Білінійна форма $\langle|\rangle: X \times X \to K$ на $K$-модулі $(X, (+,\cdot))$ називається

- *симетричною*, якщо $\forall x, y \in X\ \ \langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$;
- *невиродженою*, якщо $\forall x \in X \setminus \{0\}\ \exists y \in X\ \langle x|y\rangle \neq 0$;
- *додатньо визначеною*, якщо $\forall x \in X \setminus \{0\}\ \ \langle x|x\rangle \in \{y^2 : y \in K\} \setminus \{0\}$;
- *скалярним добутком*, якщо білінійна форма $\langle|\rangle$ симетрична і додатньо визначена.

**Приклад:** Для чисел $p, q \in \omega$ і кільця $K$ функція $\langle|\rangle_{p,q}: K^{p+q} \times K^{p+q} \to K$

$$\langle x|y\rangle_{p,q} := \sum_{i\in p} x_i \cdot y_i - \sum_{i\in q} x_{i+p} \cdot y_{i+p}\,,$$

на $K$-модулі $K^{p+q}$ є невиродженою симетричною білінійною формою.
Для поля $K = \mathbf{R}$ білінійна форма $\langle x|y\rangle_{p,0}$ є скалярним добутком.

$K$-білінійний простір $\left(K^{p+q}, (+,\cdot,\langle|\rangle_{p,q})\right)$ будемо позначати через $K^{p,q}$.

# Ізоморфізми білінійних просторів

**Означення:** Білінійні простори $(X, (+,\cdot,\langle|\rangle))$ та $(Y, (+,\cdot,\langle|\rangle))$ над кільцем $K$ називаються ізоморфними, якщо існує бієкція $F: X \to Y$, що зберігає структуру білінійного простору, тобто

- $\forall x, y \in X \;\; F(x + y) = F(x) + F(y)$;
- $\forall a \in K \; \forall x \in X \;\; F(a \cdot x) = a \cdot F(x)$;
- $\forall x, y \in X \;\; \langle F(x) | F(y) \rangle = \langle x | y \rangle$.

**Приклад:** $K$-білінійний простір $(X, (+,\cdot,\langle|\rangle))$ над полем $K$ ізоморфний $K$-білінійному простору $K^{p,q}$ тоді і лише тоді, коли $K$-лінійний простір $(X, (+,\cdot))$ має базу $e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_{p+q} \in X$ таку, що

$$\langle e_i | e_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j \leq p; \\ -1, & \text{якщо } i = j > p; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

# Класифікація (псевдо)евклідових просторів

**Означення:** Скінченновимірні $\mathbf{R}$-білінійні простори з невиродженою (додатньо визначеною) симетричною білінійною формою називають *псевдоевклідовими,* (відп. *евклідовими*).

**Приклад:** Для довільних чисел $p, q \in \omega$ білінійний простір $\mathbf{R}^{p,q}$ є псевдоевклідовим, а простір $\mathbf{R}^{p,0}$ — евклідовим.

**Теорема:** Кожний псевдоевклідовий $\mathbf{R}$-білінійний простір ізоморфний деякому псевдоевклідовому білінійному простору $\mathbf{R}^{p,q}$.

**Теорема:** Кожний евклідовий білінійний простір ізоморфний деякому евклідовому білінійному простору $\mathbf{R}^{n,0}$.

# Афінні білінійні простори

**Означення:** Афінним $K$-білінійним простором над кільцем $K$ називається математична структура $\left(X, \left(V, +, \cdot, \langle | \rangle, \overrightarrow{**}\right)\right)$, у якій $(V, +, \cdot, \langle | \rangle)$ є $K$-білінійним простором, а $\left(X, \left(V, +, \cdot, \overrightarrow{**}\right)\right)$ є $K$-афінним простором.

**Приклад:** Для довільних чисел $p, q \in \omega$ та комутативного кільця $K$ математична структура $K^{p,q} := \left(K^{p+q}, \left(K^{p+q}, +, \cdot, \langle | \rangle_{p,q}, -\right)\right)$ є афінним $K$-білінійним простором.

# Ізоморфізми афінних білінійних просторів

**Означення:** Афінні $K$-білінійні простори $\left(X, (V_X, +,\cdot, \langle | \rangle, \overrightarrow{**})\right)$ та $\left(Y, (V_Y, +,\cdot, \langle | \rangle, \overrightarrow{**})\right)$ називаються ізоморфними, якщо існує біекція $F: X \to Y$, для якої існує такий ізоморфізм $\vec{F}: V_X \to V_Y$ $K$-білінійних просторів $(V_X, +,\cdot, \langle | \rangle)$ та $(V_Y, +,\cdot, \langle | \rangle)$, що $\vec{F}(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{F(x)F(y)}$ для довільних точок $x, y \in X$.
Така біекція $F: X \to Y$ називається ізоморфізмом $K$-афінних просторів $\left(X, (V_X, +,\cdot, \langle | \rangle, \overrightarrow{**})\right)$ та $\left(X, (V_Y, +,\cdot, \langle | \rangle, \overrightarrow{**})\right)$.

**Приклад:** Афінний $K$-білінійний простір $\left(X, (V, +,\cdot, \langle | \rangle, \overrightarrow{**})\right)$ над полем $K$ ізоморфний афінному $K$-білінійному простору $K^{p,q}$ тоді і лише тоді, коли $K$-лінійний простір $\left(V, (+,\cdot)\right)$ має базу $e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{p+q} \in V$ таку, що

$$\langle e_i | e_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j \le p; \\ -1, & \text{якщо } i = j > p; \\ 0, & \text{якщо } i \ne j. \end{cases}$$

# Псевдоевклідові афінні простори

**Означення:** Псевдоевклідовим афінним простором називається довільний афінний $\mathbf{R}$-білінійний простір $\left(X, (V, +, \cdot, \langle | \rangle, \overrightarrow{**})\right)$, у якому векторний простір $(V, +, \cdot)$ скінченновимірний, а білінійна форма $\langle | \rangle$ — симетрична і невироджена. Якщо ця білінійна форма ще й додатньо визначена, тоді цей афінний білінійний простір називається евклідовим афінним простором.

**Приклад:** Для довільних чисел $p, q \in \omega$ афінний білінійний простір $\mathbf{R}^{p,q}$ є псевдоевклідовим, а простір $\mathbf{R}^{p,0}$ — евклідовим.

**Теорема:** Кожний псевдоевклідовий афінний простір ізоморфний деякому псевдоевклідовому афінному простору $\mathbf{R}^{p,q}$.

**Теорема:** Кожний евклідовий афінний простір ізоморфний деякому евклідовому афінному простору $\mathbf{R}^{n,0}$.

# Аксіоми Вайля

У 1916 році німецький математик Hermann Weyl запропонував аксіоматизувати геометричний простір як 3-вимірний евклідовий афінний простір. Розписуючи означення цієї математичної структури, отримаємо 15 аксіом Вайля.

Аксіоматика Вайля базується на шести неозначуваних поняттях, що відповідають шести складовим математичної структури афінного **R**-білінійного простору:

«точка», «вектор»,
«сума векторів», «добуток вектора на число»,
«скалярний добуток векторів», «вектор між точками».

Властивості та відношення між цими неозначуваними поняттями описуються 4-ма групами аксіом Вайля.

**Hermann Weyl**
(1885 – 1955)

# I-а група аксіом Вайля

I.1. Існує хоча б одна точка.

I.2. Довільним точкам $x, y$ відповідає єдиний вектор $\overrightarrow{xy}$.

I.3. Для довільної точки $x$ та вектора $\boldsymbol{v}$ існує єдина точка $y$ така, що $\overrightarrow{xy} = \boldsymbol{v}$.

I.4. Для довільних точок $a, c, x, y$, з рівності $\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{xy}$ випливає рівність $\overrightarrow{ax} = \overrightarrow{cy}$.

На базі цих аксіом можна означити додавання векторів і довести множина векторів є групою відносно цієї операції додавання.

# II-а і III-я група аксіом Вайля

II.1. Кожному вектору $\boldsymbol{v}$ та дійсному числу $a$ відповідає єдиний вектор $a \cdot \boldsymbol{v}$, що називається добутком вектора $\boldsymbol{v}$ на число $a$;

II.2. Довільний вектор $\boldsymbol{v}$ рівний $1 \cdot \boldsymbol{v}$;

II.3. Множення числа на вектор асоціативне, тобто $(a \cdot b) \cdot \boldsymbol{v} = a \cdot (b \cdot \boldsymbol{v})$ для довільних чисел $a, b$ та вектора $\boldsymbol{v}$.

II.4. Множення числа на вектор дистрибутивне відносно додавання чисел, тобто $(a + b) \cdot \boldsymbol{v} = a \cdot \boldsymbol{v} + b \cdot \boldsymbol{v}$ для довільних чисел $a, b$ та вектора $\boldsymbol{v}$.

II.5. Множення числа на вектор дистрибутивне відносно додавання векторів, тобто $a \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a \cdot \boldsymbol{u} + a \cdot \boldsymbol{v}$ для довільного числа $a$ та векторів $\boldsymbol{u}$ та $\boldsymbol{v}$.

III.1. Існує три вектори $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, такі, що довільний вектор $\boldsymbol{v}$ розписується як лінійна комбінація $\boldsymbol{v} = x \cdot \boldsymbol{i} + y \cdot \boldsymbol{j} + z \cdot \boldsymbol{k}$ для єдиних дійсних чисел $x, y, z$, що називаються координатами вектора $\boldsymbol{v}$ в базі $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

# IV-я група аксіом Вайля

IV.1. Для довільних векторів $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ визначене дійне число $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle$, що називається скалярним добутком векторів $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$.

IV.2. Скалярний добуток симетричний,
тобто $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{u} \rangle$ для довільних векторів $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$.

IV.3. Скалярний добуток дистрибутивний,

тобто $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{w} \rangle$ для довільних векторів $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$.

IV.4. Скалярний добуток асоціативний,
тобто $\langle a \cdot \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = a \cdot \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle$ для довільних векторів $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ та числа $a$.

IV.5. Скалярний добуток додатньо визначений,
тобто $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{u} \rangle > 0$ для довільного ненульового вектора $\boldsymbol{u}$.

# Переваги та недоліки аксіоматики Вайля

**Переваги:**

1) Наявність апарату векторної алгебри, що дуже зручно для застосувань геометрії, особливо в фізиці та механіці.
2) Можливість негайного узагальнення на простори вищих вимірів
3) Можливість узагальнення на псевдоевклідові простори, зокрема для аксіоматизації часопростору Мінковського.

**Недоліки:**

1) Багато неозначуваних понять (6) та аксіом (15).
2) Апеляція до зовнішніх об’єктів, зокрема векторів та дійсних чисел.
3) Інтуїтивна неочевидність деяких аксіом.
4) Необхідність базової підготовки з лінійної алгебри для розуміння цієї аксіоматичної системи.
5) Не годиться для опису неевклідових геометрій.

# Часопростір Мінковського

**Означення:** Часопростір Мінковського це псевдоевклідів афінний простір $\mathbf{R}^{1,3} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$, наділений білінійною формою

$$\langle x|y\rangle \coloneqq c^2 x_0 y_0 - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3),$$

де $c$ — стала, що відповідає швидкості світла.

Автоморфізми псевдоевклідового векторного простору $\mathbf{R}^{1,3}$ називають перетвореннями Лоренца, а автоморфізми псевдоевклідового афінного простору $\mathbf{R}^{1,3}$ – перетвореннями Пуанкаре.

Перетворення Лоренца є елементами групи групи Лоренца $O(1,3)$, а перетворення Пуанкаре – елементами групи Пуанкаре, яка є напівпрямим добутком груп $\mathbf{R}^4$ і $O(1,3)$.

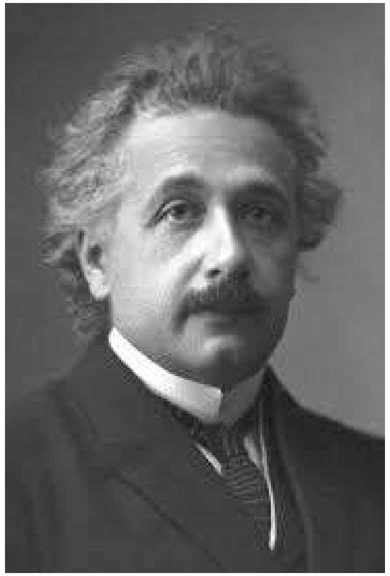
# Lorentz, Poincare, Minkowski, Einstein

Часопростір Мінковського та перетворення Лоренца і Пуанкаре відіграють важливу роль в математичному обґрунтуванні Спеціальної Теорії Відносності Альберта Айнштайна.

*Hendrik Antoon* ***Lorentz***
(1853 – 1928)

*Jules Henri* ***Poincaré***
(1854 – 1912)


(1864 – 1909)



Albert **Einstein**
(1879 – 1955)

# Геометрія часопростору Мінковського

Елементи $(t, x, y, z) \in \mathbf{R}^{1,3}$ часопростору Мінковського називають подіями.

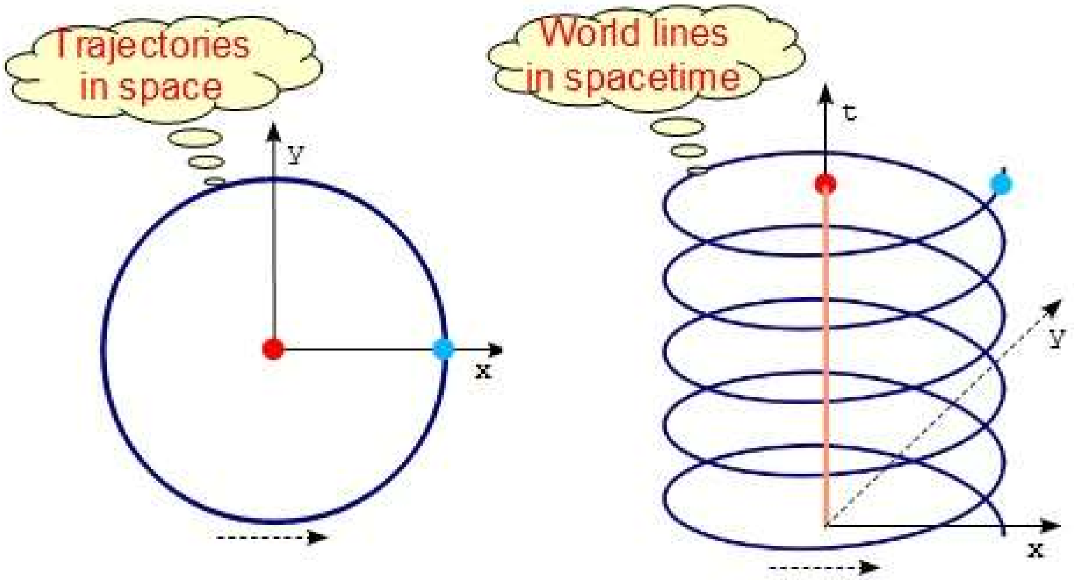
Кожна подія $(t, x, y, z)$ відбувається в момент часу $t$ у точці 3-вимірного простору з координатами $(x, y, z)$.

При русі в часопросторі, матеріальна точка описує криву

$$(p(t))_{t\in[a,b]} = \big((t, x(t), y(t), z(t))\big)_{t\in[a,b]},$$

що називається її світовою лінією, або як писав Шевченко, долею.

*У кожного своя доля і свій світ широкий.*
Тарас Шевченко

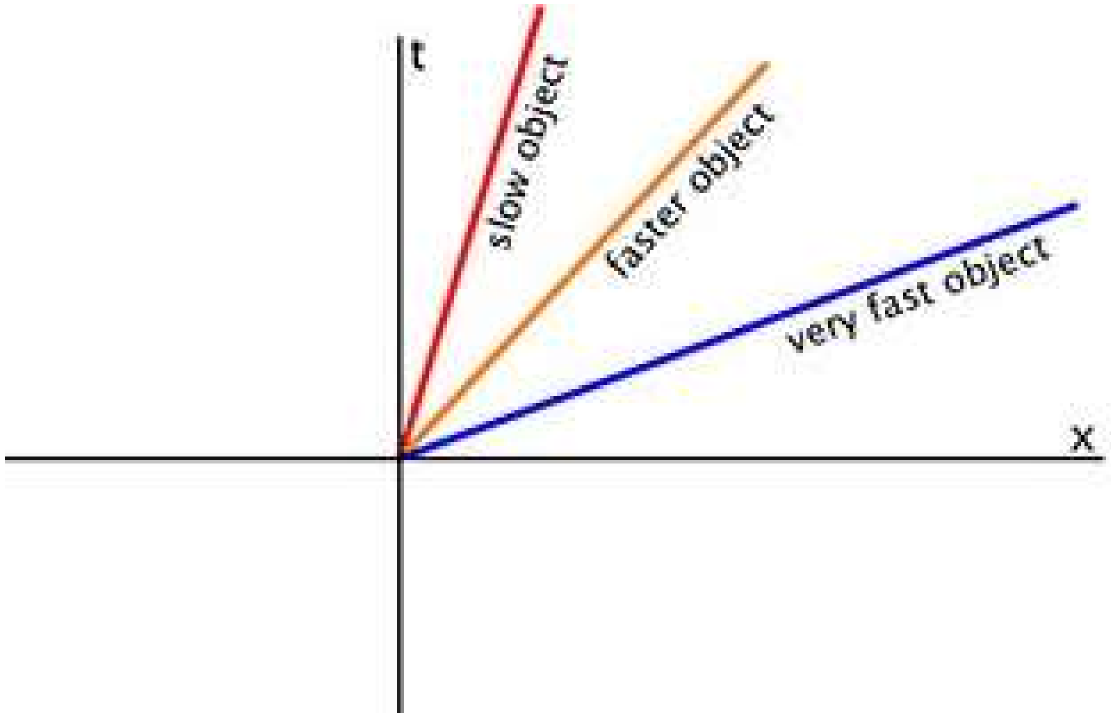


# Приклад прямолінійної долі

**Приклад:** Матеріальна точка, що в нульовий момент часу починає рухатися з точки $(x_0, y_0, z_0)$ з постійною швидкістю $(u, v, w)$, описує пряму

$$\big(p(t)\big)_{t\geq 0} = \big((t, x_0 + ut, y_0 + vt, z_0 + wt)\big)_{t\geq 0}$$

в часопросторі $\mathbf{R}^{1,3}$.



# Часопросторові інтервали

Для двох подій $p_1 = \langle t_1, x_1, y_1, z_1 \rangle$ та $p_2 = \langle t_2, x_2, y_2, z_3 \rangle$, дійсне число

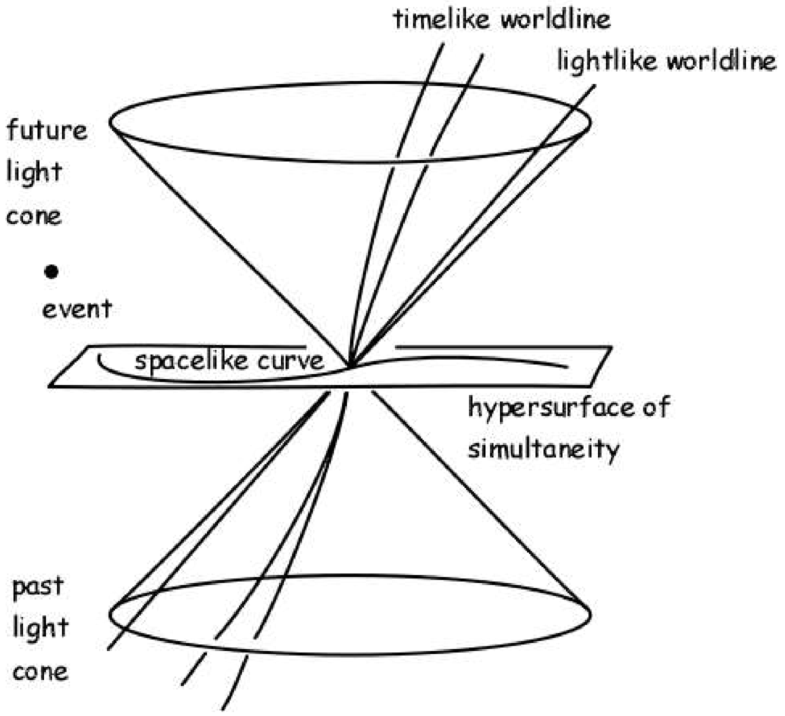
$$s^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2$$

називають часопросторовим інтервалом між подіями $p_1, p_2$.

Перетворення Лоренца та Пункаре не міняють часопросторових інтервалів.

Часопросторовий інтервал $s^2$ між подіями називають

- часоподібним (timelike), якщо $s^2 > 0$;
- світлоподібним (lightlike), якщо $s^2 = 0$;
- простороподібним (spacelike), якщо $s^2 < 0$.



# Власний час матеріальної точки

Основний постулат теорії відносності Айнштайна стверждує, що жодна матеріальна точка не може рухатися зі швидкістю, що перевищує швидкість світла в вакуумі, яка рівна 300 000 км/с.

Як наслідок, часопросторові інтервали між подіями у долі матеріальної точки є додатними і тому з них можна тягнути квадратні корені і інтегрувати. Інтеграл

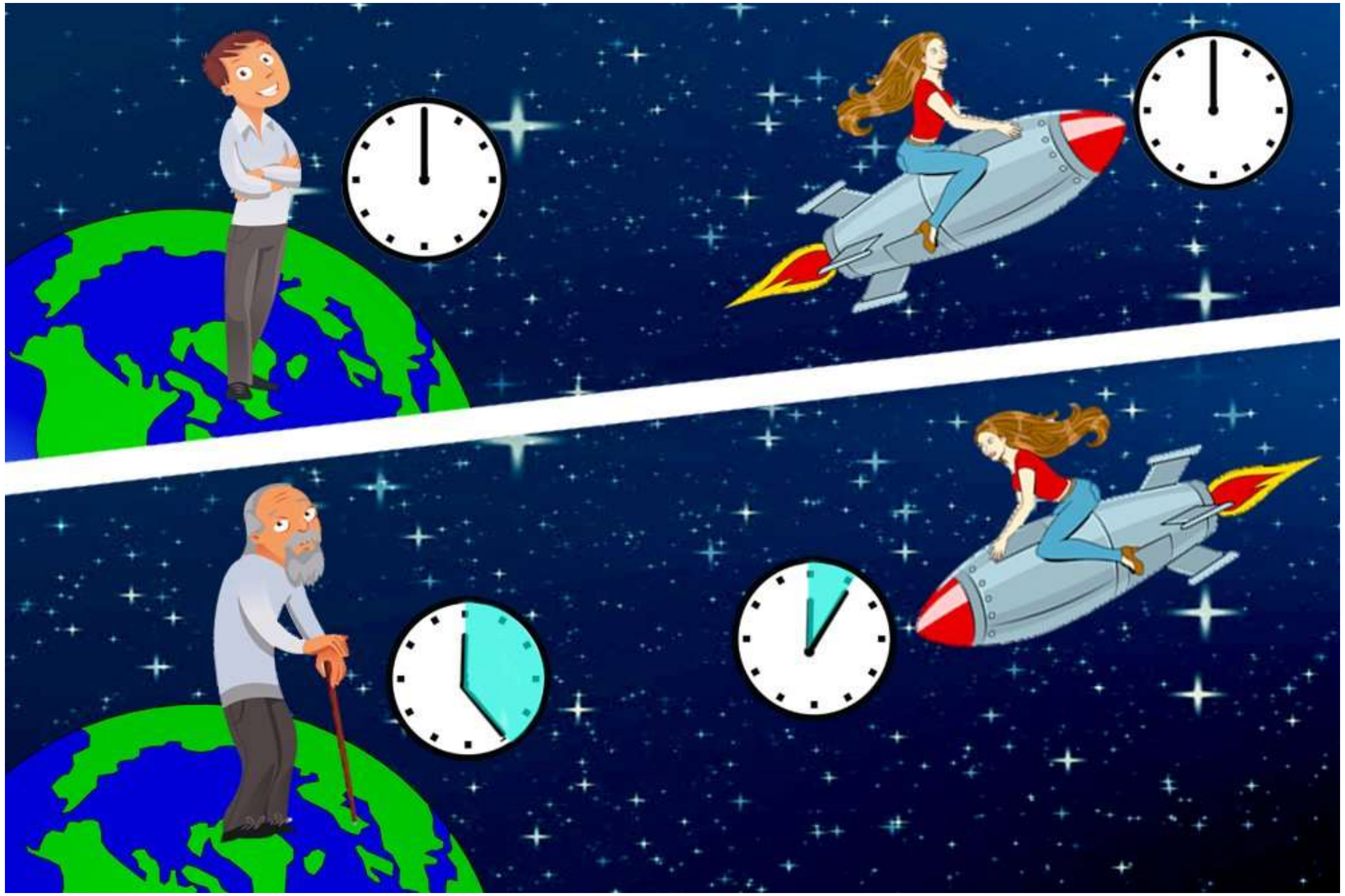
$$T = \frac{1}{c}\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{c^2 - (x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2)}dt$$

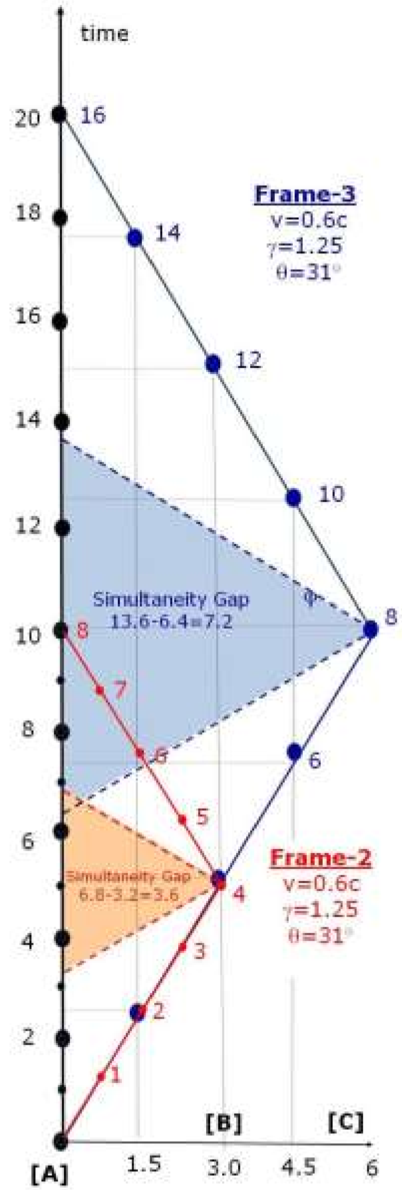
називається власним часом матеріальної точки з долею $p(\mathrm{t}) = \langle t, x(t), y(t), z(t)\rangle$, який протік між подіями $p(t_1)$ і $p(t_2)$.

Зокрема, власний час між подіями $p(t_1)$ і $p(t_2)$ для точки, що рухається прямолінійно і рівномірно з швидкістю $v$, рівний $(t_2 - t_1)\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Тобто для рухомої матеріальної точки її власний час сповільнюється, а для частинок, що рухаються зі швидкістю світла час взагалі зупиняється. Цим пояснюється відомий парадокс близнюків, один з яких полетів в космос і повернувся молодим, а інший залишився на місці і швидко постарів.

# Парадокс близнюків





Далі буде!

LVIV MATH SOCIETY

Лекції відбуваються під егідою
Львівського Математичного Товариства.

Будемо вдячні за підтримку.