Тарас Банах: Основи геометрії

Лекція 6: Метричні та топологічні структури

13 квітня 2023

Основи Геометрії

чим є евклідова геометрія і яке її місце в сучасній теоретико-множинній парадигмі математичних структур Бурбакі?

Математичні структури

La mathématique est la science des structures mathématiques
Nicolas Bourbaki

Означення: Математичною структурою називається впорядкована пара (X, S) двох множин, що задовольняє певний список A аксіом, характерних для цієї математичної структури. Аксіомою називається формула $\varphi(X, S, C_1, \dots, C_n)$ з вільними змінними $X, S, C_1, \dots, C_n$, серед яких $C_1, \dots, C_n$ є певними фіксованими множинами (параметрами).

Наприклад, для векторних просторів над полем F це поле виступає як параметр в аксіомах векторного поля, а для метричних просторів таким параметром є множина дійсних чисел **R**.

Для математичної структури (X, S), множина X називається її носієм (underlying set), а S – структурою математичної структури.

Залежно від вигляду аксіом зі списку *A,* математичні структури поділяються на елементарні (для них аксіоми містять лише квантори виду $\forall x \in X$ або $\exists x \in X$) та неелементарні (різного порядку складності, наприклад для другого порядку дозволено мати квантори $\forall A \subseteq X^n$ чи $\exists A \subseteq X^n$, які перебирають відношення на X).

Також розрізняють базові структури (порядкові, алгебраїчні, метричні, топологічні) та комбіновані структури (тобто комбінації базових структур).

<u>Практично всі важливі математичні структури присутні на дійсній прямій, яка є одночасно:</u>

орієнтованим графом, частково впорядкованою множиною, лінійно впорядкованою множиною, магмою, напівгрупою, групою, кільцем, полем, впорядкованою групою, впорядкованим полем, модулем, лінійним простором, афінним простором, білінійним простором, псевдоевклідовим білінійним простором, евклідовим білінійним простором, афінним білінійним простором, псевдоевклідовим афінним простором, евклідовим афінним простором, метричним простором, топологічним простором, рівномірним простором, грубим простором, нормованим простором, банаховим простором, банаховою алгеброю, передгільбертовим простором, гільбертовим простором і т.д.

<u>**Питання:**</u> *Яка математична структура описує геометрію Евкліда?*

Структура метричного простору

Означення (Frechet, 1905; Hausdorff, 1914)**:** Метричним простором називається математична структура (X, d), структура якої є метрикою на X, тобто функцією $d: X \times X \to \mathbf{R}$, яка задовольняє три аксіоми метрики:

- $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y;$
- $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x);$
- $\forall x, y, z \in X \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$

Приклад: На довільній підмножині $X \subseteq \mathbf{R}$ функція

$$d: X \times X \to \mathbf{R}, \; d: \langle x, y \rangle \mapsto |x - y|,$$

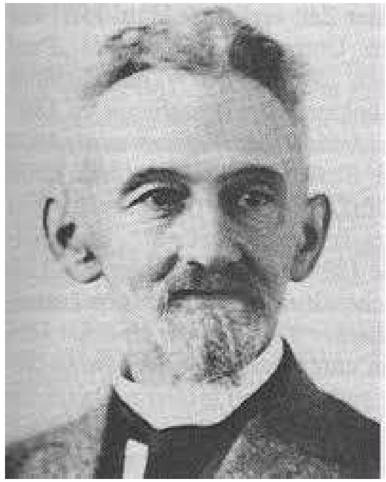
є метрикою і пара (X, d) є метричним простором.

Приклад: Для довільного $n \in \mathbf{N}$ функція

$$d: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, \; d: \langle x, y \rangle \mapsto \sqrt{\sum_{i \in n} |x_i - y_i|^2}$$

є метрикою і пара $(\mathbf{R}^n, d)$ є метричним простором.

Maurice Fréchet
(1878 – 1973)



Felix Hausdorff
(1868 – 1942)

Метрична характеризація Z, Q, R

Означення: Метричні простори (X, d_X) та (Y, d_Y) називаються ізометричними, якщо існує бієкція $F: X \to Y$ така, що $d_Y(F(x), F(y)) = d_X(x, y)$ для довільних елементів $x, y \in X$.

Задача: Придумати метричну характеризацію простору натуральних чисел.

Теорема (фольклор): Метричний простір (X, d) ізометричний $\mathbf{Z}$ тоді і лише тоді, коли $d[X \times X] \subseteq \omega$ і $\forall c \in X\ \forall r \in \mathbf{N}\ \exists a, b \in X\ \ [\{a, b\} = \{x \in X: d(c, x) = r\} \wedge d(a, b) = 2r]$.

Теорема (фольклор): Метричний простір (X, d) ізометричний $\mathbf{Q}$ тоді і лише тоді, коли $d[X \times X] \subseteq \mathbf{Q}$ і $\forall c \in X\ \forall r \in \mathbf{Q}_+\ \exists a, b \in X\ \ [\{a, b\} = \{x \in X: d(c, x) = r\} \wedge d(a, b) = 2r]$.

Теорема (Will Brian, 2023): Метричний простір (X, d) ізометричний $\mathbf{R}$ тоді і лише тоді, він повний і $\forall c \in X\ \forall r \in \mathbf{R}_+\ \exists a, b \in X\ \ [\{a, b\} = \{x \in X: d(c, x) = r\} \wedge d(a, b) = 2r]$.

Зауваження: Евклідова площина містить всюди щільну підмножину, для якої справджується умова з теореми Браяна, тобто без повноти характеризація Браяна не вірна.

Повні метричні простори та простори Больцано

Означення: Послідовність $(x_n)_{n\in\omega}$ точок метричного простору (X,d) називається

- збіжною, якщо $\exists x\in X\ \forall\varepsilon>0\ \exists n\in\mathbf{N}\ \forall m\in\mathbf{N}\ (m>n\to d(x_m,x)<\varepsilon)$;
- фундаментальною, якщо $\forall\varepsilon>0\ \exists k\in\mathbf{N}\ \forall n,m\in\mathbf{N}\ (k<n<m\to\ d(x_n,x_m)<\varepsilon)$.

Легко бачити, що кожна збіжна послідовність є фундаментальною.

Означення: Метричний простір називається *повним*, якщо в ньому кожна фундаментальна послідовність є збіжною.

Теорема (Cauchy, 1821): Дійсна пряма є повним метричним простором.

Означення: Метричний простір називається *простором Больцано*, якщо кожна обмежена послідовність у цьому просторі містить збіжну підпослідовність.

Зауваження: Кожен простір Больцано є повним.

Ізометрична характеризація Евклідових просторів

Для точок $x, y, z \in X$ метричного простору (X, d) пишемо $\mathbf{M}xyz$, якщо

$$d(x,z) = d(x,y) + d(y,z) = 2d(x,y).$$

Теорема: Метричний простір (X, d) ізометричний деякому евклідовому простору $\mathbf{R}^n$ тоді і лише тоді, коли він задовольняє три аксіоми:

- (X, d) – є простором Больцано;
- $\forall a, b \in X \; \exists c \in X \;\; \mathbf{M}abc;$
- $\forall a, b \in X \; \exists m \in X \; \forall x \in X \;\; 4d(x,m)^2 + d(a,b)^2 = 2d(x,a)^2 + 2d(x,b)^2.$

Симетричні прямолінійні простори

Означення: Метричний простір (X, d) називають

- *прямолінійним*, якщо $\forall a, b \in X\ \exists!\, x, y \in X\ \ \mathbf{M}axb \wedge \mathbf{M}aby$;
- *симетричним*, якщо $\forall a, b, c, \alpha, \beta \in X\ \big(\mathbf{M}ac\alpha \wedge \mathbf{M}bc\beta \to \mathrm{d(a, b)} = \mathrm{d}(\alpha, \beta)\big)$.

Твердження: Для довільних різних точок $a, b \in X$ прямолінійного повного метричного простору (X, d) існує єдине ізометричне вкладення $F: \mathbf{R} \to X$ таке, що $F(0) = a$ і $F(d(a, b)) = b$.

Твердження: Симетричний простір (X, d) є прямолінійним тоді і лише тоді, коли $\forall a, b \in X\ \exists x, y \in X\ \mathbf{M}axb \wedge \mathbf{M}aby$.

Приклад: Кожен строго опуклий нормований векторний простір є симетричним і прямолінійним.

Метрична та топологічна характеризації евклідових просторів

Теорема: Метричний простір (X, d) є *ізометричним* деякому евклідовому простору $\mathbf{R}^n$ тоді і лише тоді, коли він є непорожим прямолінійним простором Больцано і

$$\forall a, b, c, m \in X \; [\mathbf{M}amb \to 4d(c,m)^2 + d(a,b)^2 = 2d(a,c)^2 + 2d(b,c)^2].$$

Теорема: Метричний простір (X, d) є *гомеоморфним* деякому евклідовому простору $\mathbf{R}^n$, якщо він є непорожним симетричним прямолінійним простіром Больцано.

Гіпотеза (Busemann, 1942): Метричний простір (X, d) є *гомеоморфним* деякому евклідовому простору $\mathbf{R}^n$, якщо він непорожній, прямолінійний і больцанівський.
(Ця гіпотеза правдива, якщо $\dim(X) \leq 4$).

Структура топологічного простору


Felix Hausdorff
(1868 –1942)

Def (Hausdorff, 1914): *Топологічним простором* називається математична структура $(X, \mathscr{T})$, що задовольняє 4 аксіоми:

- $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{P}(X)$;
- $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathscr{T}$;
- $\forall U, V \in \mathscr{T}\ [U \cap V \in \mathscr{T}]$;
- $\forall \mathfrak{T} \subseteq \mathscr{T}\ [\bigcup \mathfrak{T} \in \mathscr{T}]$.

Сім'я $\mathscr{T}$ називається *топологією* на X.

Зауваження: Аксіоми топології записуються формулами логіки 3-го порядку.

Приклад: Кожен метричний простір (X, d) має структуру топологічного простору з топологією $\mathscr{T}$, яка складається з відкритих підмножин X. Підмножина $U \subseteq X$ метричного простору (X, d) називається *відкритою*, якщо

$$\forall u \in U\ \exists \varepsilon \in \mathbf{Q}_+\ \forall x \in X\ \big((d(u, x) < \varepsilon) \to (x \in U)\big).$$

Топологічна характеризація $\mathbf{N}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{Z}$

Означення: Топологічні простори $(X, \mathcal{T}_X)$ та $(Y, \mathcal{T}_Y)$ називають гомеоморфними (хоча мали б називатися ізоморфними), якщо існує така бієкція $F: X \to Y$, що $\mathcal{T}_Y = \{F[U]: U \in \mathcal{T}_X\}$.

Теорема (тривіальна): Топологічний простір $(X, \mathcal{T})$ гомеоморфний топологічним просторам $\mathbf{N}, \omega, \mathbf{Z}$ тоді і лише тоді, коли множина X злічення і $\forall x \in X\ [\{x\} \in \mathcal{T}]$.

Топологічна характеризація $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$

Wacław Sierpiński
(1882 –1969)

Теорема (Serpiński, 1920): Топологічний простір $(X, \mathcal{T})$ гомеоморфний топологічному простору $\mathbf{Q}$ тоді і лише тоді, коли множина X зліченна, топологія $\mathcal{T}$ регулярна і має зліченну базу, і $\forall x \in X\ [X \setminus \{x\} \in \mathcal{T} \wedge \{x\} \notin \mathcal{T}\ ]$.

Означення: Топологія $\mathcal{T}$ на множині X

- *регулярна*, якщо $\forall U \in \mathcal{T}\ \ \forall x \in U\ \exists V, W \in \mathcal{T}\ [V \cap W = \emptyset \wedge x \in V \wedge X \setminus U \subseteq W]$;
- *має зліченну базу*, тобто зліченну підсім'ю $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ таку, що $\mathcal{T} = \{\bigcup \mathcal{U} : \mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}\}$.

Теорема (Ward, 1936): Топологічний простір $(X, \mathcal{T})$ гомеоморфний $\mathbf{R}$ тоді і лише тоді, коли:

- топологія $\mathcal{T}$ регулярна і має таку зліченну базу $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, що $X \in \mathcal{B} \wedge \forall B \in \mathcal{B}\ [B\ \ -\text{зв'язна}]$;
- $\forall x \in X\ \exists U, V \in \mathcal{T}\ [U \cup V = X \setminus \{x\}\ \wedge\ U \cap V = \emptyset\ \wedge\ U, V\ \ -\text{зв'язні і непорожні}]$.

Означення: Підмножина $B \subseteq X$ топологічного простору $(X, \mathcal{T})$ називається *зв'язною*, якщо $\forall U, V \in \mathcal{T}\ [\mathrm{B} \subseteq U \cup V \wedge B \cap U \neq \emptyset \neq \mathrm{V} \cap B \to U \cap V \cap B \neq \emptyset]$.

Топологічна характеризація евклідових просторів

Проблема: Охарактеризувати топологічні простори, гомеоморфні $\mathbf{R}^n$.

Зауваження: Топологічний простір X гомеоморфний $\mathbf{R}^n$ тоді і лише тоді, коли його одноточкова компактифікація гомеоморфна n-вимірній сфері.

Теорема (Moore, 1920): Топологічний X гомеоморфний колу тоді і лише тоді, коли X регулярний зі зліченною базою, зв'язний, і для довільних різних точок $a, b \in X$ множина $X \setminus \{a, b\}$ незв'язна.

Теорема (Bing, 1949): Топологічний простір X гомеоморфний 2-вимірній сфері тоді і лише тоді, коли X — регулярний зі зліченною базою, зв'язний, локально зв'язний, для довільних точок $a, b \in X$ множина $X \setminus \{a, b\}$ зв'язна, а для довільної топологічна копії кола $S \subseteq X$ множина $X \setminus S$ — незв'язна.

Теорема: Топологічний простір є гомеоморфним деякому евклідовому простору $\mathbf{R}^n$ тоді і лише тоді він непорожній і його топологія породжується деякою больцанівською, симетричною і прямолінійною метрикою.

Аксіоми планіметрії Біркгофа (1932)

Неозначуваними поняттями в аксіоматиці Біркгофа є «точка», «пряма», «віддаль між точками», «міра кута». Ці неозначувані поняття повинні задовольняти чотири аксіоми:

I. Кожна пряма ізометрична множині дійсних чисел зі стандартною метрикою.

II. Через довільні дві різні точки проходить єдина пряма.

III. Для довільного кута AOB визначена його міра $\angle AOB$, яка приймає значення в групі $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, причому для кожного променя OB відображення $\angle\colon OA \mapsto \angle AOB$ є гомеоморфізмом із множини променів з початком в точці O на коло $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$.

IV. Для довільних трикутників $ABC, A'B'C'$ і додатного дійсного числа k, якщо $|A'B'| = k|AB|, |A'C'| = k|AC|, \angle B'A'C' = \angle BAC,$ тоді $|B'C'| = k|BC|, \angle C'B'A' = \angle CBA$ і $\angle A'C'B' = \angle ACB$.

Переваги та недоліки аксіоматики Біркгофа

Переваги: мала кількість аксіом та придатність до негайного застосування на практиці, в якій важливими є вимірювання (наприклад, у геодезії, архітектурі, будівництві чи артилерійській справі).

Недоліки:

- значна кількість неозначуваних понять, для розуміння яких вже треба мати певні знання з геометрії, зокрема знати, що таке число π і чому кути вимірюються в радіанах;
- апеляція до зовнішніх об’єктів, якими є дійсна пряма чи група кола, в якій приймає значення міра кута;
- складність формалізації цієї аксіоматики на мові математичних структур;
- неадекватність опису фізичного простору, в якому немає жодної канонічної метрики, доки не зафіксовано одиниці вимірювання, для однозначного вибору якої немає жодних передумов;
- звуження геометрії до єдиної її арифметичної моделі, пов’язаної з дійсними числами;
- непридатність до опису неевклідової геометрії;
- домінування теорії дійсного числа (яка є досить складною) над геометрією (яка виникла значно раніше, ніж людство збагнуло природу дійсного числа).

Використання аксіоматики Біркгофа у викладанні геометрії в середній школі

George Birkhoff
(1884 – 1944)

Проте практична спрямованість аксіоматики Біркгофа спричинилася до того, що саме вона була прийнята за основну при вивченні геометрії у New Math Curriculus*, розробленому американською School Mathematics Study Group в 60-х роках з метою подолати проблеми в математичній освіті після запуску радянського «Спутніка», так званий Sputnik Crisis.

Популярний в Україні підручник геометрії для 7-го класу (автори: Мерзляк, Полонський, Якір) теж бере за основу саме (американський) підхід Біркгофа: вивчення геометрії через вимірювання відстаней і кутів та певне нехтування європейських традицій аксіоматично-дедуктивної математики.

*До речі, в США проєкт New Math Curriculum визнаний провальним і в кінці 60-х був згорнутий.

Дякую за увагу!

Далі буде!

Лекції відбуваються під егідою
Львівського Математичного Товариства.

Будемо вдячні за підтримку.