Основи Геометрії

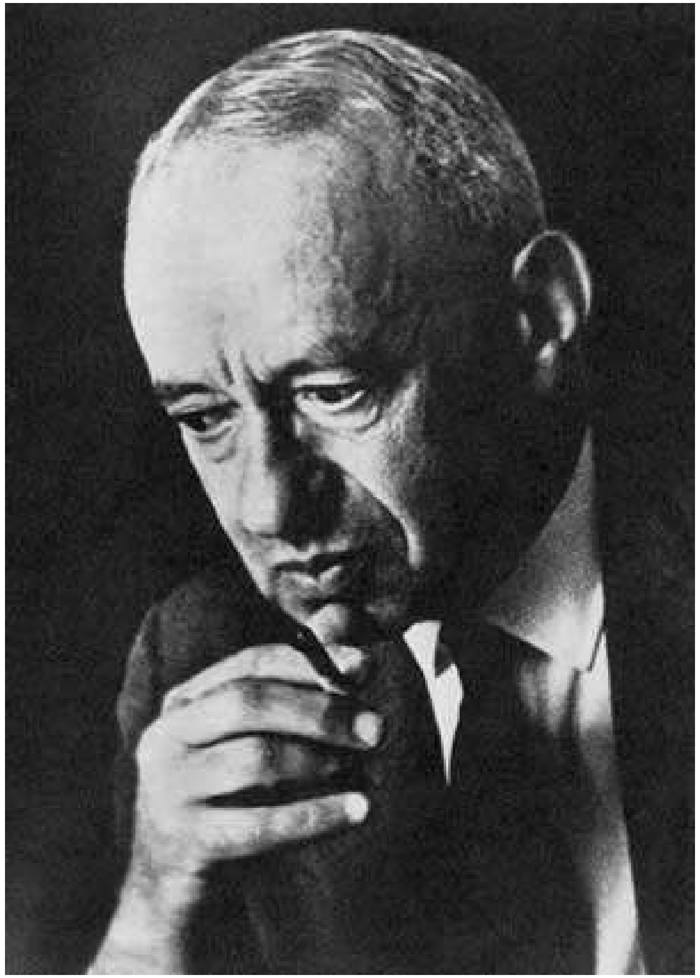
чим є евклідова геометрія і яке її місце в сучасній теоретико-множинній парадигмі математичних структур Бурбакі?

Аксіоматика Тарського

Альфред Тарський (при народженні Teitelbaum) – визначний польсько-американський логік і математик, член Варшавської математичної школи та Львівсько-Варшавської школи логіки (1895 – 1939), заснованої львівським професором Казіміром Твардовським (промотором Стефана Банаха).

Тарський вважається одним із 4-х найвидатніших логіків усіх часів, поряд з Арістотелем, Фреґе та Ґеделем.

Викладаючи основи геометрії у Варшавському університеті в 1926/27 роках, Тарський створив свою аксіоматику геометрії, яка вважається найекономнішою. Саме вона використовується в сучасних системах автоматизованих доведень типу Coq чи Lean.

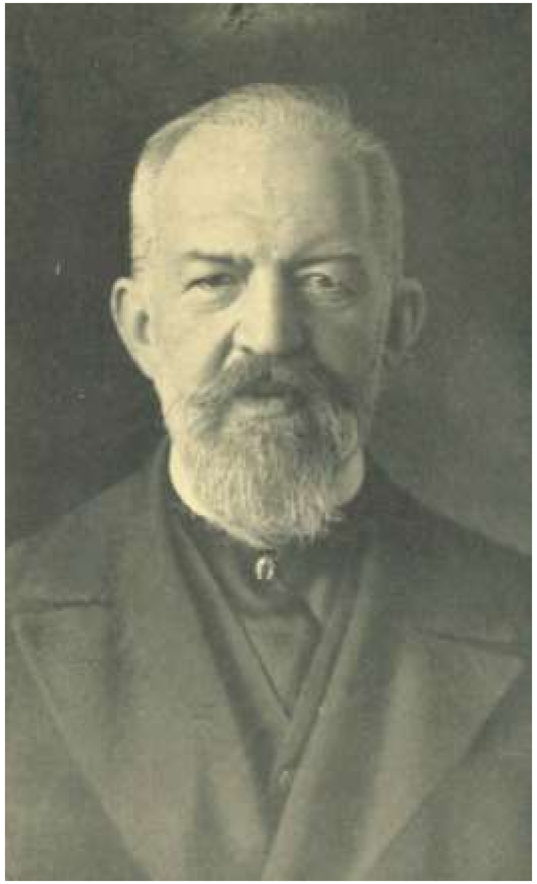


Alfred Tarski
(1901 – 1983)

Львівсько-варшавська філософська школа

Засновником львівської-варшавської філософської школи був Казимир Твардовський, вихованець Віденської філософської школи, який почав працювати у Львівському Університеті в 1895 році.

Sale wykładowe zastał prawie puste. Kilku znajomych (…), kilku śmielszych słuchaczy obcych zaglądało trochę z grzeczności, a trochę przez ciekawość, jak wygląda i jak wykłada młody profesor. Zwolna sala się zapełniać zaczęła i niedługo miejsc w niej brakło, a z czasem wykłady przenieść trzeba było poza mury Uniwersytetu, bożadna z sal Wszechnicynie mogła pomieścić słuchaczy,którzy już wczesnym rankiem spieszyli obsadzić miejsca (Witwicki, 1920, s. 11).



Kazimierz Twardowski
(1866-1938)

Львівсько-варшавська філософська школа

Jednym z założeń metodologicznych szkoły było, by filozof oprócz samej filozofii wykształcony był w jeszcze innej dyscyplinie szczegółowej.

Wychowywał Twardowski przede wszystkim przez przykład własnego postępowania i przez konsekwentne i nieubłagane egzekwowanie od słuchaczy słowności, punktualności, obowiązkowości, i systematyczności. Był na tym punkcie nieubłagany. Studenta, który się spóźnił na wykład, w sposób bardzo stanowczy wypraszał z sali. Studenta, który bez usprawiedliwienia opuścił 2 lub 3 posiedzenia seminarium, skreślał z listy. Sam nigdy się nie spóźniał, nigdy bez koniecznej przyczyny nie opuszczał żadnego wykładu czy zebrania, był systematyczny aż do pedanterii, każda godzina dnia miała swoje przeznaczenie.

Autor: Kazimierz Ajdukiewicz, *Pozanaukowa działalność Kazimierza Twardowskiego*, „Ruch Filozoficzny”, t. XIX, nr 1–2, s. 32–33.

Могила Твардовського
На Личаківському цвинтарі

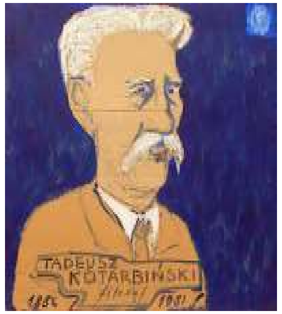
Генеалогічне дерево львівсько-варшавської школи в царині математики

K.Twardowski
PhD - 1891

S.Łuszczewska-Romahnowa
PhD – 1932

J.Łukasiewicz
PhD – 1906

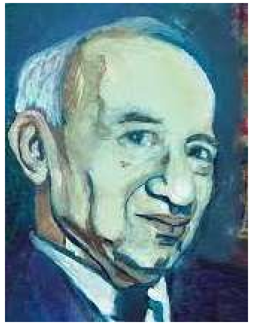
K.Ajdukiewicz
PhD - 1912



T.Kotarbinski
PhD - 1912

S.Lesniewski
PhD - 1912

S.Banach
PhD - 1920



A.Tarski
PhD - 1924

S.Mazur
PhD - 1932

Послідовників: **107** **87** **161** **1240** **313** **15**

Структури Тарського

Означення: Структурою Тарського називається математична структура $(X, (\mathbf{B}, \mathbf{E}))$, що складається з множини X, елементи якої називають «точками», та двох відношень $\mathbf{B} \subseteq X^3$ та $\mathbf{E} \subseteq X^2 \times X^2$, що називаються відношеннями «лежати між» (betweenness) та «еквідистантності» або «конґруентності».

З точки зору логіки, ці відношення вважаються неозначуваними поняттями, так само як і точки.

Для трьох точок x, y, z пишемо $\mathbf{B}xyz$, і кажемо, що y лежить між точками x та z, якщо $(x, y, z) \in \mathbf{B}$.

Для чотирьох точок a, b, x, y пишемо $ab \equiv xy$ і кажемо, що відстань між точками a і b рівна віддалі між x і y, якщо $((a, b), (u, v)) \in \mathbf{E}$.

Приклад: Кожен нормований простір, зокрема $\mathbf{R}^n$, має канонічну структуру Тарського. Геометричний простір, в якому ми живемо теж має канонічну структуру Тарського.

Ізоморфізми структур Тарського

Означення: Ізоформізмом структур Тарського $\big(X, (\mathbf{B}_X, \mathbf{E}_X)\big)$ і $\big(Y, (\mathbf{B}_Y, \mathbf{E}_Y)\big)$ називається довільна бієкція $f: X \to Y$, що зберігає структуру в тому сенсі, що

- $\forall x, y, z \in X \;\; (x, y, z) \in \mathbf{B}_X \leftrightarrow \big(f(x), f(y), f(z)\big) \in \mathbf{B}_Y$;
- $\forall a, b, x, y \in X \;\; \big((a, b), (x, y)\big) \in \mathbf{E}_X \leftrightarrow \Big(\big(f(a), f(b)\big), \big(f(x), f(y)\big)\Big) \in \mathbf{E}_Y$.

Проблема 1: Охарактеризувати структури Тарського, які ізоморфні евклідовому простору $\mathbf{R}^n$, наділеному канонічною структурою Тарського.

Приклад: Кожна впорядкована група $\big(X, (+, \leq)\big)$ має канонічну структуру Тарського: $\mathbf{B}xyz \leftrightarrow (x \leq y \leq z \;\vee\; z \leq y \leq x)$ і $xy \equiv ab \leftrightarrow |x - y| = |a - b|$.

Проблема 2: Охарактеризувати структури Тарського, ізоморфні канонічним структурам Тарського на впорядкованих групах.

Простори Тарського

Означення: **Простором Тарського** називається структура Тарського $\big(X, (\mathbf{B}, \mathbf{E})\big)$, яка задовольняє такі 7 аксіом (першого порядку):

(RE) $\forall x, y \ \ (xy \equiv yx)$

(IE) $\forall x, y, z \ \big((xy \equiv zz) \to x = y\big)$

(TE) $\forall x, y, u, v, a, b \ \big((xy \equiv ab) \wedge (xy \equiv uv) \to (ab \equiv uv)\big)$

(IB) $\forall x, y \ \big(\mathbf{B}xyx \to (x = y)\big)$

(SC) $\forall x, y, a, b \ \exists z \ \big(\mathbf{B}xyz \wedge (yz \equiv ab)\big)$

(PA) $\forall a, p, b, q, c \ \big(\mathbf{B}apb \wedge \mathbf{B}bqc \to \exists x \ (\mathbf{B}pxc \wedge \mathbf{B}axq)\big)$

(FS) $\forall \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{v}, \check{x}, \check{y}, \check{z}, \check{v}$
$(\mathbf{B}\hat{x}\hat{y}\hat{z} \wedge \mathbf{B}\check{x}\check{y}\check{z} \wedge \hat{x}\hat{y} \equiv \check{x}\check{y} \wedge \ \hat{y}\hat{z} \equiv \check{y}\check{z} \wedge \hat{x}\hat{v} \equiv \check{x}\check{v} \wedge \ \hat{y}\hat{v} \equiv \check{y}\check{v}) \to (\hat{z}\hat{v} \equiv \check{z}\check{v})$.

Характеризація Z і R

Def: Для структури Тарського $(X, (\mathbf{B}, \mathbf{E}))$ і точок $x, y, z \in X$ пишемо $\mathbf{M}axy$ і кажемо, що y — напівдорозі (midpoint) між x та y, якщо $\mathbf{B}xyz \wedge xy \equiv yz$.

Теорема: Простір Тарського $(X, (\mathbf{B}, \mathbf{E}))$ ізоморфний прямій **R** тоді і лише тоді, коли він задовольняє 3 аксіоми:

(MP) $\forall x \,\forall z \,\exists y \,\mathbf{M}xyz;$

(L) $\exists a, b \left(a \neq b \wedge \forall x \,(Bxab \vee Baxb \vee Babx)\right)$;

(CA) $\forall A, B \subseteq X \,\forall o \,(\forall a \in A \,\forall b \in B \,\mathbf{B}oab) \to (\exists x \,\forall a \in A \,\forall b \in B \,\mathbf{B}axb).$

Зауваження: Простір Тарського задовольняє

- аксіоми (L) і (CA), тоді і лише тоді, коли він ізоморфний **Z** або **R**.
- аксіому (L) тоді і лише тоді, коли він ізоморфний деякій впорядкованій групі.

Характеризація евклідового простору

Теорема (Tarski – Szmielew – Gupta): Простір Тарського $(X, (\mathbf{B}, \mathbf{E}))$ ізоморфний евклідовому простору $\mathbf{R}^n$ виміру $n \geq 2$ тоді і лише тоді, коли він задовольняє 4 аксіоми:

(BA) $\forall x, y, z \left(\mathbf{B}xyz \vee \mathbf{B}xzy \vee \mathbf{B}yxz \vee (\exists c\ (cx \equiv cy \equiv cz))\right)$

(CA) $\forall A, B \subseteq X\ \forall o \in X\ (\forall a \in A\ \forall b \in B\ \mathbf{B}oab) \to (\exists x\ \forall a \in A\ \forall b \in B\ \mathbf{B}axb)$

($D_{\leq n}$) $\exists x_0, x_1, \dots, x_n \forall x, y\ (x_0x \equiv x_0y \wedge \cdots \wedge x_nx \equiv x_ny) \to x = y)$

($\neg D_{<n}$) $\forall x_1, \dots, x_n\ \exists x, y\ (x \neq y \wedge x_1x \equiv x_1y \wedge \cdots \wedge x_nx \equiv x_ny)$.

Ця теорема каже, що структуру Тарського n-вимірного евклідового простору можна однозначно охарактеризувати 11-ма аксіомами, серед яких 10 аксіом першого порядку і одна аксіома другого порядку.

Аксіоми паралельності Больяї, Тарського та ін.

В теоремі Tarski-Szmielew-Gupta, аксіому паралельності Больяї

(BA) $\forall x, y, z\ \left(\mathbf{B}xyz \vee \mathbf{B}xzy \vee \mathbf{B}yxz \vee \big(\exists c\ (cx \equiv cy \equiv cz)\big)\right)$

можна замінити деякими іншими еквівалентними аксіомами, зокрема, Аксіомою Тарського:

(TP) $\forall a, b, c, u, v\ \big(\mathbf{B}buc \wedge \mathbf{B}auv \rightarrow \exists p, q\ (\mathbf{B}abp \wedge \mathbf{B}acq \wedge \mathbf{B}pvq)\big)$

або Аксіомою Середньої Лінії:

(ML) $\forall a, b, c, x, y, z\ \big((\mathbf{M}axb \wedge \mathbf{M}byc \wedge \mathbf{M}azc) \rightarrow (xy \equiv az)\big).$

Зауваження: Для довільного простору Тарського, (BA)⇔(TP)⇒(ML) але (ML) ⇒ (BA)⇔(TP) лише за наявності аксіоми Архімеда, яка випливає з аксіоми неперервності (CA).

Переваги і недоліки аксіоматики Тарського

Переваги:

- мала кількість неозначуваних понять (3) і аксіом (11).
- придатність до аксіоматизації геометрії еквклідових просторів довільного виміру
- придатність до аксіоматизації певних неевклідових геометрій
- придатність до аксіоматизацій неархімедових геометрій

Недоліки:

- надлишковіть неозначуваних понять
  (кількість яких можна зменшити до двох)
- непридатність до аксіоматизації еліптичних геометрій.

Характеризація (не)евклідових просторів

Теорема: Простір Тарського $(X, (\mathbf{B}, \mathbf{E}))$ ізоморфний деякому евклідовому простору $\left(H, (+, \cdot \langle | \rangle)\right)$ виміру $n \geq 2$ над полем **R** тоді і лише тоді, коли він задовольняє 3 аксіоми:

(BA) $\forall x, y, z \left(\mathbf{B}xyz \lor \mathbf{B}xzy \lor \mathbf{B}yxz \lor \left(\exists c\ (cx \equiv cy \equiv cz)\right)\right)$

(CA) $\forall A, B \subseteq X\ \forall o \in X\ (\forall a \in A\ \forall b \in B\ \mathbf{B}oab) \to (\exists x\ \forall a \in A\ \forall b \in B\ \mathbf{B}axb)$

$(D_{\geq 2})$ $\exists x, y, z\ \neg(Bxyz \lor Bxzy \lor Byxz)$.

Теорема: Простір Тарського ізоморфний деякому евклідовому простору $\left(H, (+, \cdot \langle | \rangle)\right)$ виміру $n \geq 2$ над піфагоровим впорядкованим полем тоді і лише тоді, коли він задовольняє аксіоми (BA) і $(D_{\geq 2})$.

Def: Поле F називається піфагоровим, якщо $\forall x \in F\ \exists y \in F\ (x^2 + 1 = y^2)$.

Теорема: Простір Тарського ізоморфний деякому простору Лобачевського тоді і лише тоді, коли він задовольняє аксіоми ¬(BA) і (CA).

Дякую за увагу!

Далі буде!

LVIV MATH SOCIETY

Лекції відбуваються під егідою
Львівського Математичного Товариства.

Будемо вдячні за підтримку.