Основи Геометрії

чим є евклідова геометрія і яке її місце в сучасній теоретико-множинній парадигмі математичних структур Бурбакі?

Шнуркова геометрія

Насправді евклідову геометрію можна обґрунтувати і викладати, виходячи лише з двох неозначуваних понять: «точка» та «шнурок», а усі інші поняття («конґруентність», «лежати між», «відрізок», «пряма», «площина», «кут» тощо), строго означувати через поняття шнурка.

Вибір шнурка як первинного геометричного поняття зумовлюється тим, що шнурок був першим геометричним інструментом, яким оволоділо людство, а вже в древньому Єгипті оволоділо цілком вправно.

Термінологічне запитання на mathoverflow

A name for a mathematical structure of geometric type

Asked 4 months ago Modified 3 months ago Viewed 297 times

7

I am looking for (maybe existing) name for a mathematical structure $(X,\leqslant)$ consisting of a set X and a transitive relation $\leqslant\,\subseteq X^2\times X^2$ such that $xx\leqslant yz\leqslant zy$ and $(xy\leqslant zz\ \Rightarrow\ x=y)$ for every $x,y,z\in X$. Here for elements $x,y\in X$ I denote by xy the ordered pair (x,y).

There are at least three important examples of such mathematical structure:

1. a metric space (X,d) in which $xy\leqslant uv$ is defined as $d(x,y)\le d(u,v)$;
2. an ordered group $(X,+,\le)$ in which $xy\leqslant uv$ is defined as $|x-y|\le|u-v|$;
3. the Euclidean or hyperbolic plane in which $xy\leqslant ab$ means that xy is congruent to ac for some $c\in[a,b]$.

> **Question.** *What would be a good name for such a structure* $(X,\leqslant)$?

I thought about *protometric spaces* but this name is already occupied for something different.

Maybe to call it a *compass space*? Because the standard compass can be used for comparing distances (this is exactly what this mathematical structure describes). What do you think? Google shows nothing mathematical for the search ``compass space''.

mg.metric-geometry foundations geometric-structures Edit tags

Share Cite Edit Close Delete Flag edited Jan 11 at 0:35 asked Dec 8, 2022 at 8:13 Taras Banakh

1 I like the compass space terminology. – Joel David Hamkins Dec 8, 2022 at 15:20

2 @JoelDavidHamkins Thanks. I also arrived to this compass space terminology. It seems that compass spaces can provide very elegant foundations of geometry (maybe even better than those of Tarsky who built the geometry on two undefined notions: the betweenness relation and the congruence; in contrast the structure of a compass space has just one undefined notion: a compass; betweenness can be easily defined using the compass). Last time I am thinking how to teach Foundations of Geometry in the simplest possible way. – Taras Banakh Dec 8, 2022 at 15:52

2 One possible name for such a structure $(X,\leqslant)$ could be a transitive metric space. This name emphasizes the transitive property of the relation $\leqslant$, as well as the fact that it is a generalization of the notion of a metric space. Alternatively, it could be called a transitive distance space to emphasize the connection to distance-like structures. – canvas123 Dec 8, 2022 at 21:16

For "the simplest possible way" of teaching plane geometry, aligning with the existing literature (which includes multiple books and web resources on Tarski-style geometry) seems more important than reducing two primitives to one which is interdefinable with them. – user44143 Dec 19, 2022 at 7:04

@MattF. Maybe for professional mathematicians, the choice of undefined notions and axioms is not so important, but for students (who are not familiar with the subject) it is a matter of understanding or not understanding what is going on, so for educational purposes, it is important. And if you know any textbook on Tarski-style geometry, written in English, share this information, please. – Taras Banakh Dec 23, 2022 at 11:44

1 Answer

Sorted by: Highest score (default)

5

After a long search, I have finally found an existing well-known geometric tool that does exactly what is required: it compares distances without expressing them in real numbers. This measuring instrument is called a *rope* and has been used in the human civilization since the ancient times.

For example, at this picture taken from the tomb of Menna ($\approx$ 1350 BC) we can see so called harpedonaptai, who professionally used such a rope:

So, I suggest the following terminology:

Definition 1. A *rope* on a set X is a relation $\leqslant\,\subseteq X^2\times X^2$ satisfying three axioms:

Математичний шнурок

Означення: **Шнурком** (англійською ***rope***) на множині *X* будемо називати бінарне відношення $\leq \subseteq X^2 \times X^2$ між впорядкованими парами точок, що задовольняє 3 аксіоми:

(TR) $\forall a, b, u, v, x, y \in X\ (ab \leq uv\ \wedge\ uv \leq xy) \rightarrow (ab \leq xy)$,

(ES) $\forall x, y \in X\ (xy \leq yx)$,

(ZD) $\forall x, y \in X\ (xx \leq yy)$.

Позначення цих аксіом походить від їхніх повних англійських назв:

TRansitivity, End-Symmetry, Zero-Distance.

Це означення формалізує можливість використання шнурка для порівняння відстаней між точками (без вимірювання їхнього числового значення).

З аксіом (TR)+(ES) випливає рефлексивність шнурка: $\forall x, y \in X\ xy \leq yx \leq xy$.

Деякі властивості шнурків

Означення: Шнурок $\leq$ на множині X називають

- лінійним, якщо $\forall a, b, x, y \in X\ (ab \leq xy \vee xy \leq ab)$
- знакозмінним, якщо $\forall x, y, z \in X\ (xy \leq zz \vee zz \leq xy)$
- невід’ємним, якщо $\forall x, y, z \in X\ (zz \leq xy)$
- додатнім, якщо він невід’ємний і $\forall x, y, z \in X\ \big((xy \leq zz) \to x = y\big)$.

Приклади додатних лінійних шнурків

Приклад 1: Кожен метричний простір (X, d) має канонічний додатній лінійний шнурок $\leq$, означений формулою $xy \leq ab \Leftrightarrow d(x, y) \leq d(a, b)$.

Приклад 2: Кожна впорядкована група $(G, +, \leq)$ має канонічний додатній лінійний шнурок $\leq$, означений формулою $xy \leq ab \Leftrightarrow |x - y| \leq |a - b|$.

Приклад 3: Геометричний простір, що нас оточує має природний лінійний додатній шнурок, проте не має канонічної метрики.

Канонічний лінійний шнурок на псевдо-Евклідовому просторі

Нагадаємо, що квадратичною формою на лінійному просторі X над полем F називається функція $q: X \to F$ виду $q(x) = \langle x|x \rangle$, де $\langle | \rangle : X \times X \to F$ – деяка симетрична білінійна форма на X.

Приклад: Кожна квадратична форма $q: X \to F$ на лінійному просторі X над впорядкованим полем $\big(F, (+,\cdot, \le_F)\big)$ породжує канонічний лінійний шнурок $\le$ на X, що означується формулою:

$$xy \le ab \Leftrightarrow q(x-y) \le_F q(a-b).$$

Зокрема, для довільних натуральних чисел p, n псевдо-Евклідовий простір $\mathbf{R}^{p,n}$ має має канонічний лінійний шнурок $\le$, що означується формулою

$$xy \le ab \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i \in p} (x_i - y_i)^2 - \sum_{j \in n} \big(x_{p+j} - y_{p+j}\big)^2 \le_{\mathbf{R}} \sum_{i \in p} (a_i - b_i)^2 - \sum_{j \in n} \big(a_{p+j} - b_{p+j}\big)^2.$$

Цей шнурок є додатним тоді і лише тоді, коли $n = 0$, тобто коли псевдо-Евкілідовий простір є Евклідовим, і тоді цей шнурок породжується Евклідовою метрикою.

Ще один канонічний шнурок на псевдо-Евклідовому просторі

Приклад: Кожна квадратична форма $q: X \to F$ на лінійному просторі X над впорядкованим полем $\big(F, (+, \cdot, \le_F)\big)$ породжує невід'ємний шнурок $\le$ на X, що означується формулою:

$$xy \le ab \Leftrightarrow \Big((|q(x-y)| \le_F |q(a-b)|) \wedge \big(0 \le_F q(x-y) \cdot q(a-b)\big) \Big).$$

Зокрема, такий невід'ємний шнурок має довільний псевдо-Евклідовий простір $\mathbf{R}^{p,n}$.

Цей шнурок на $\mathbf{R}^{p,n}$ є

- лінійним тоді і лише тоді, коли $p \cdot n = 0$;
- додатним тоді і лише тоді, коли $n = 0$, тобто коли псевдо-Евклідовий простір $\mathbf{R}^{p,n}$ є Евклідовим, і тоді цей шнурок породжується Евклідовою метрикою.

Шнуркові структури та їхні ізоморфізми

Означення: *Шнурковою структурою* називається математична структура $(X, \leq)$, яка складається з множини X та шнурка $\leq$ на X.

Означення: Дві шнуркові структури $(X, \leq_X)$ і $(Y, \leq_Y)$ називаються ізоморфними, якщо існує така бієкція $F: X \to Y$, що $\forall x, y, u, v \in X \;\; xy \leq_X uv \;\; \leftrightarrow F(x)F(y) \leq_Y F(u)F(v)$.

Проблема (відкрита): *Охарактеризувати шнуркові структури, ізоморфні псевдо-Евклідовим просторам* $\mathbf{R}^{p,q}$*, зокрема псевдо-Евклідовому часопростору Мінковського* $\mathbf{R}^{1,3}$.

Проблема (розв'язана): *Охарактеризувати шнуркові структури, ізоморфні евклідовим просторам* $\mathbf{R}^n$.

Ми дамо відповідь на цю проблему, на основі модифікованої аксіоматики Тарського.

Спершу означимо деякі звичні нам геометричні поняття через структуру шнурка.

Конгруентність в шнуркових структурах

Означення: Для шнуркової структури $(X, \leq)$ відношення конгруентності $\equiv \subseteq X^2 \times X^2$ означується формулою

$$xy \equiv uv \;\Leftrightarrow\; (xy \leq uv \;\wedge\; uv \leq xy).$$

Зауваження: З рефлексивності та транзитивності шнурка випливає, що відношення конгруентності є відношенням еквівалентності на X^2.

Означення: Для шнуркової структури $(X, \leq)$ бієктивне відображення $F: X \to X$ називається *ізометрією*, якщо $\forall x, y \in X\ \big(xy \equiv F(x)F(y)\big)$.

Сфери та кулі в шнуркових структурах

Означення:

Для точок $c, u, v \in X$ шнуркової структури $(X, \leq)$, множина

$$\overline{c \equiv uv} := \{x \in X : cx \equiv uv\}$$

називаються сферою радіуса uv навколо точки c.

Кулею радіуса uv навколо точки c називається множина

$$\overline{c \leq uv} := \{x \in X : (cc \leq cx \leq uv) \vee (uv \leq cx \leq cc)\}.$$

Афінні та опуклі оболонки в шнурковій структурі

Означення: Для підмножини $A \subseteq X$ шнуркової структури $(X, \leq)$, множини

$$[A]_{\leq} \coloneqq \{x \in X : \{x\} = \bigcap_{a \in A} \overline{a \leq ax}\},$$

$$[A]_{\equiv} \coloneqq \{x \in X : \{x\} = \bigcap_{a \in A} \overline{a \equiv ax}\}$$

називаються опуклою та афінною оболонкою множини A, відповідно.

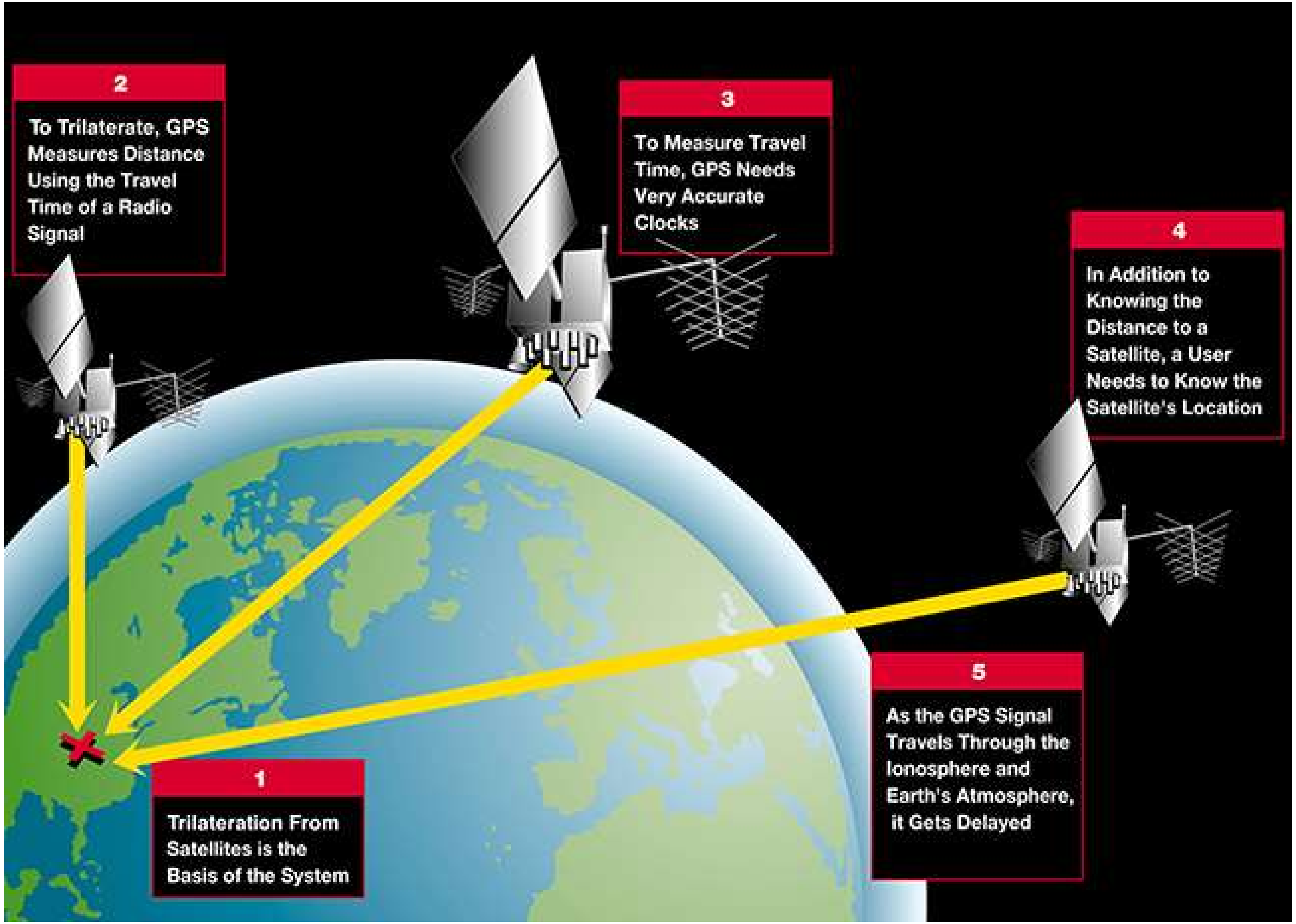
Означення: Для шнуркової структури $(X, \leq)$ кардинал

$$\mathrm{GPS}(X, \leq) = \min\{|A| : A \subseteq X = [A]_{\equiv}\}$$

називається GPS-складністю шнуркової структури $(X, \leq)$.

Приклад: $\mathrm{GPS}(\mathbf{R}^n) = n + 1$ для кожного $n \in \mathbf{N}$.

GPS


2
To Trilaterate, GPS Measures Distance Using the Travel Time of a Radio Signal
3
To Measure Travel Time, GPS Needs Very Accurate Clocks
4
In Addition to Knowing the Distance to a Satellite, a User Needs to Know the Satellite's Location
1
Trilateration From Satellites is the Basis of the System
5
As the GPS Signal Travels Through the Ionosphere and Earth's Atmosphere, it Gets Delayed

Прямі та відрізки в шнурковій структурі

Означення: Для різних точок $u, v \in X$ шнуркової структури $(X, \leq)$ афінна оболонка

$$[uv]_{\equiv} := \{x \in X:\ \{x\} = \overline{u \equiv ux} \cap \overline{v \equiv vx}\}$$

дублетону $\{u, v\}$ зветься прямою, що проходить через точки u, v.

Означення: Для точок $u, v \in X$ шнуркової структури $(X, \leq)$ опукла оболонка

$$[uv]_{\leq} := \{x \in X: \{x\} = \overline{u \leq ux} \cap \overline{v \leq vx}\}\}$$

дублетону $\{u, v\}$ зветься відрізком з кінцями u, v.

Означення: Для трьох точок $x, y, z \in X$ шнуркової структури $(X, \leq)$ пишемо $\mathbf{B}xyz$ і кажемо, що y лежить між точками x та z, якщо $y \in [xz]_{\leq}$.

Означення: Для трьох точок $x, y, z \in X$ шнуркової структури $(X, \leq)$ пишемо $\mathbf{M}xyz$ і кажемо, що y – середина відрізка x та z, якщо $y \in [xz]_{\leq}$ і $xy \equiv yz$.

Шнуркові простори Тарського

Означення: Шнуркова структура $(X, \leq)$ називається *шнурковим простором Тарського*, якщо шнурок $\leq$ додатний, тобто

$$\forall x, y \in X\ \Big((x = y) \leftrightarrow \big(\forall a, b \in X\ (xy \leq ab)\big)\Big)$$

і виконуються наступні три аксіоми:

(SC) $\forall x, y, a, b \in X\ \exists z \in X\ \big(\mathbf{B}xyz \wedge (yz \equiv ab)\big);$

(PA) $\forall a, p, b, q, c \in X\ \big(\mathbf{B}apb \wedge \mathbf{B}bqc \to \exists x \in X\ (\mathbf{B}pxc \wedge \mathbf{B}axq)\big);$

(FS) $\forall \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{v}, \check{x}, \check{y}, \check{z}, \check{v} \in X$
$(\hat{x} \neq \hat{y} \wedge \mathbf{B}\hat{x}\hat{y}\hat{z} \wedge \mathbf{B}\check{x}\check{y}\check{z} \wedge \hat{x}\hat{y} \equiv \check{x}\check{y} \wedge \hat{y}\hat{z} \equiv \check{y}\check{z} \wedge \hat{x}\hat{v} \equiv \check{x}\check{v} \wedge \hat{y}\hat{v} \equiv \check{y}\check{v}) \to (\hat{z}\hat{v} \equiv \check{z}\check{v}).$

Характеризація R, Z і впорядкованих груп

Теорема: Шнуркова структура $(X, \leq)$ ізоморфна шнурковій структурі прямої **R** тоді і лише тоді, коли $(X, \leq)$ є шнурковий простором Тарського, що задовольняє 3 аксіоми:

(MP) $\forall x, z \in X\ \exists y \in X\ \mathbf{M}xyz;$

(L) $\exists a, b \in X\ \big(a \neq b \wedge \forall x \in X\ (Bxab \vee Baxb \vee Babx)\big)$;

(CA) $\forall A, B \subseteq X\ \forall o\ (\forall a \in A\ \forall b \in B\ \mathbf{B}oab) \to (\exists x\ \forall a \in A\ \forall b \in B\ \mathbf{B}axb).$

Зауваження: Шнурковий простір Тарського задовольняє

- аксіоми (L) і (CA), тоді і лише тоді, коли він ізоморфний **Z** або **R**.
- аксіому (L) тоді і лише тоді, коли він ізоморфний шнурковій структурі деякої нетривіальної впорядкованої групи.

Характеризація евклідового простору

Теорема (Tarski – Szmielew – Gupta – B.): Шнуркова структура $(X, \leq)$ ізоморфна шнурковій структурі евклідовому простору $\mathbf{R}^n$ виміру $n \geq 2$ тоді і лише тоді, $(X, \leq)$ є шнурковим простором Тарського, що задовольняє 3 аксіоми:

(BA) $\forall x, y, z \in X \ \left(\mathbf{B}xyz \vee \mathbf{B}xzy \vee \mathbf{B}yxz \vee \left(\exists c\ (cx \equiv cy \equiv cz)\right)\right)$

(CA) $\forall A, B \subseteq X\ \forall o \in X\ (\forall a \in A\ \forall b \in B\ \mathbf{B}oab) \to (\exists x\ \forall a \in A\ \forall b \in B\ \mathbf{B}axb)$

(Dn) $\mathrm{GPS}(\mathrm{X}, \leq) = n + 1.$

Ця теорема каже, що шнуркову структуру n-вимірного евклідового простору можна однозначно охарактеризувати 9-ма аксіомами, серед яких 8 аксіом першого порядку і одна аксіома другого порядку.

Аксіоми паралельності Больяї, Тарського та ін.

У попередній теоремі аксіому паралельності Больяї

(BA) $\forall x, y, z\ \left(\mathbf{B}xyz \vee \mathbf{B}xzy \vee \mathbf{B}yxz \vee \left(\exists c\ (cx \equiv cy \equiv cz)\right)\right)$

можна замінити деякими іншими еквівалентними аксіомами, зокрема, Аксіомою Тарського:

(TP) $\forall a, b, c, u, v\ \left(\mathbf{B}buc \wedge \mathbf{B}auv \rightarrow \exists p, q\ (\mathbf{B}abp \wedge \mathbf{B}acq \wedge \mathbf{B}pvq)\right)$

або Аксіомою Середньої Лінії:

(ML) $\forall a, b, c, x, y, z\ \left((\mathbf{M}axb \wedge \mathbf{M}byc \wedge \mathbf{M}azc) \rightarrow (xy \equiv az)\right)$.

Зауваження: Для довільного простору Тарського, (BA)⇔(TP)⇒(ML) але (ML) ⇒ (BA)⇔(TP) лише за наявності аксіоми Архімеда, яка випливає з аксіоми неперервності (CA).

Характеризація (не)евклідових просторів

Теорема: Шнурковий простір Тарського X ізоморфний простору **Z** або дійсному евклідовому простору тоді і лише тоді, коли X задовольняє 2 аксіоми:

(BA) $\forall x, y, z \left(\mathbf{B}xyz \vee \mathbf{B}xzy \vee \mathbf{B}yxz \vee \left(\exists c\ (cx \equiv cy \equiv cz)\right)\right)$

(CA) $\forall A, B \subseteq X\ \forall o \in X\ (\forall a \in A\ \forall b \in B\ \mathbf{B}oab) \to (\exists x\ \forall a \in A\ \forall b \in B\ \mathbf{B}axb)$.

Теорема: Шнурковий простір Тарського X ізоморфний впорядкованій групі або евклідовому простору над піфагоровим впорядкованим полем тоді і лише тоді, коли він задовольняє аксіому паралельності (BA).

Def: Поле F називається піфагоровим, якщо $\forall x \in F\ \exists y \in F\ (x^2 + 1 = y^2)$.

Теорема: Шнурковий простір Тарського ізоморфний деякому простору Лобачевського тоді і лише тоді, коли він задовольняє аксіоми ¬(BA) і (CA).

Дидактичний Висновок

Евклідову геометрію n-вимірного евклідового простору можна викладати як геометрію шнуркової структури $(X, \leq)$, яка задовольняє 9 аксіом:

(TR) $\forall a, b, u, v, x, y \in X\ (ab \leq uv\ \wedge\ uv \leq xy) \to (ab \leq xy),$

(ES) $\forall x, y \in X\ (xy \leq yx),$

(PD) $\forall x, y \in X\ \big((x = y) \leftrightarrow \forall a, b \in X\ (xy \leq ab)\big)$

(SC) $\forall x, y, a, b \in X\ \exists z \in X\ \big(\mathbf{B}xyz \wedge (yz \equiv ab)\big)$

(PA) $\forall a, p, b, q, c \in X\ \big(\mathbf{B}apb \wedge \mathbf{B}bqc \to \exists x \in X\ (\mathbf{B}pxc \wedge \mathbf{B}axq)\big)$

(FS) $\forall \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{v}, \check{x}, \check{y}, \check{z}, \check{v} \in X$

$$(\hat{x} \neq \hat{y} \wedge \mathbf{B}\hat{x}\hat{y}\hat{z} \wedge \mathbf{B}\check{x}\check{y}\check{z} \wedge \hat{x}\hat{y} \equiv \check{x}\check{y} \wedge\ \hat{y}\hat{z} \equiv \check{y}\check{z} \wedge \hat{x}\hat{v} \equiv \check{x}\check{v} \wedge\ \hat{y}\hat{v} \equiv \check{y}\check{v}) \to (\hat{z}\hat{v} \equiv \check{z}\check{v})$$

(BA) $\forall x, y, z \in X\ \Big(\mathbf{B}xyz \vee \mathbf{B}xzy \vee \mathbf{B}yxz \vee \big(\exists c \in X\ (cx \equiv cy \equiv cz)\big)\Big)$

(CA) $\forall A, B \subseteq X\ \forall o \in X\ (\forall a \in A\ \forall b \in B\ \mathbf{B}oab) \to (\exists x \in X\ \forall a \in A\ \forall b \in B\ \mathbf{B}axb)$

(Dn) $\mathrm{GPS}(\mathrm{X}, \leq) = n + 1.$

Аксіоми (TR)--(FS) описують нейтральну геометрію довільного виміру.

Дякую за увагу!

The End!

Лекції відбуваються під егідою
Львівського Математичного Товариства.

Будемо вдячні за підтримку.